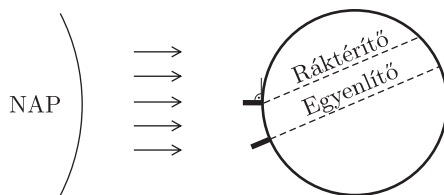


I. megoldás. *a)* Június 21-én (a nyári napforduló napján) a Nap a Ráktérítőn délben éppen merőlegesen süt, az Egyenlítőn tehát ezen a napon $\alpha = 23,5^\circ$ -os szöget zárnak be a függőlegessel a napsugarak (1. ábra). Az $\ell = 1$ m hosszú bot árnyéka ilyenkor $d_1 = \ell \operatorname{tg} \alpha = 0,435$ m hosszúságú (lásd a 2. ábrát).



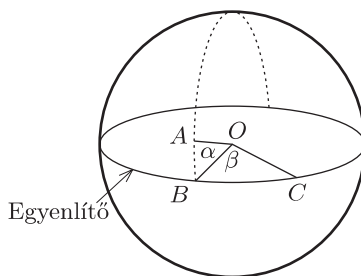
1.ábra



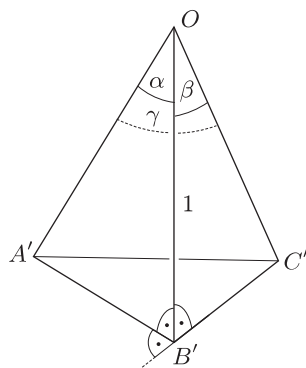
2.ábra

b) A Föld 24 óra alatt 360° -ot, 2 óra alatt tehát $\beta = 30^\circ$ -ot fordul el a tengelye körül. Legyen O a Föld középpontja, A egy olyan pont, ahol a Nap 90° -os szögben delel, B az Egyenlítő olyan pontja, amely A -val azonos délkörön helyezkedik el, C pedig az Egyenlítő ugyanezen pontjának 2 órával későbbi helye (3. ábra).

Tudjuk, hogy $\alpha = \angle AOB = 23,5^\circ$, továbbá azt, hogy az AOB és BOC síkok merőlegesek egymásra. Ha ismernénk a $\gamma = \angle AOC$ szöget, vagyis hogy milyen szöget zárnak be a napsugarak a C helyzetben levő függőleges bottal, akkor a bot árnyékának hosszát a $d_2 = \ell \operatorname{tg} \gamma$ összefüggésből könnyen ki tudnánk számítani.



3.ábra



4.ábra

Vegyünk fel egy $A'B'C'O$ tetraédert (4. ábra), amelyre

$$\angle A'OB' = \alpha, \quad \angle B'OC' = \beta,$$

továbbá

$$\angle A'B'C' = \angle A'B'O = \angle C'B'O = 90^\circ.$$

Legyen $OB' = 1$, ekkor $B'C' = \operatorname{tg} \beta$, $A'B' = \operatorname{tg} \alpha$, és Pitagorasz tétele szerint

$$OC' = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}, \quad OA' = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}, \quad A'C' = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Könnyen belátható, hogy $\angle A'OC' = \angle AOC = \gamma$ a keresett szög.

Írjuk fel az $A'OC'$ háromszögre a koszinusztételt:

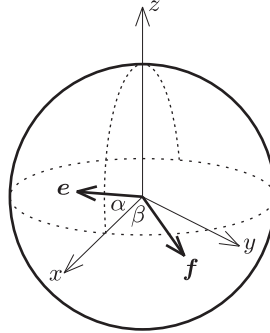
$$(A'C')^2 = (OA')^2 + (OC')^2 - 2 OA' \cdot OC' \cdot \cos \gamma,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{(OA')^2 + (OC')^2 - (A'C')^2}{2 OA' \cdot OC'} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) + (\operatorname{tg}^2 \beta + 1) - \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta + 1}} = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0,794; \quad \Rightarrow \quad \gamma = 37,4^\circ.\end{aligned}$$

A bot árnyékának hossza tehát a kérdéses időpontban: $d_2 = \ell \operatorname{tg} \gamma = 0,76$ m.

II. megoldás. Vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek origója a Föld középpontja, $x-y$ síkja pedig az Egyenlítő síkjával esik egybe, és az x tengely a bot delelési helyzete felé mutat (5. ábra).



5.ábra

Ebben a koordináta-rendszerben a Nap felé mutató egységvektor $\mathbf{e} = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$, a delelési helyzethez képest β szöggel elfordult bot felé mutató egységvektor pedig $\mathbf{f} = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$ módon adható meg. ($\alpha = 23,5^\circ$ az Egyenlítő síkjának a földpálya síkjával bezárt szöge.)

Az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ vektorok által bezárt γ szög a napsugarak és a bot szöge, melynek koszinusza a két vektor skalárszorzatával egyenlő:

$$\cos \gamma = \mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = e_x f_x + e_y f_y + e_z f_z = \cos \alpha \cos \beta.$$

Az $\ell = 1$ méteres bot árnyékának hossza:

$$d = \ell \cdot \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1} = \ell \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - 1},$$

ami

$$d = \ell \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^2 \alpha}}$$

alakban is felírható.

a) Délben $\beta_1 = 0$, ekkor $\gamma = \gamma_1 = \alpha$, az árnyék hossza tehát

$$d_1 = \ell \cdot \operatorname{tg} \alpha = 43,5 \text{ cm.}$$

b) A delelés után 2 órával $\beta_2 = 30^\circ$, ekkor $\gamma = \gamma_2 = 37,4^\circ$, és a bot árnyéka $d_2 = 76,4$ cm hosszú.