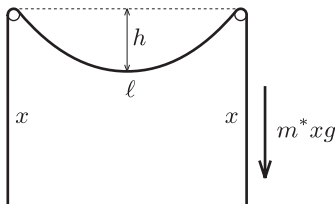


I. megoldás. Jelöljük a kötéł egységnyi hosszúságú darabjának tömegét m^* -gal, a függőlegesen lelógó egy-egy rész hosszát pedig x -szel (1. ábra)!

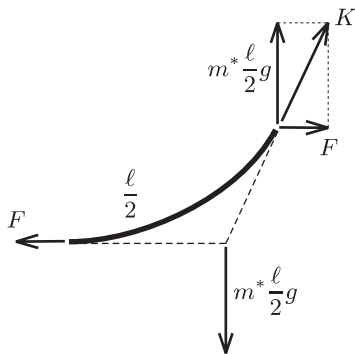
Vizsgáljuk a belógó kötéł egyik felének egyensúlyát (2. ábra)! Ennek a résznek a súlya $m^*g\ell/2$. A kötelet feszítő erő vízszintes F komponense a kötéł minden pontjában ugyanakkora, hiszen a nehézségi erő függőleges. A függőleges komponens helyről helyre változik, a kötéł közepénél nulla, a szegnél pedig a belógó rész felének súlya: $m^*\frac{\ell}{2}g$.



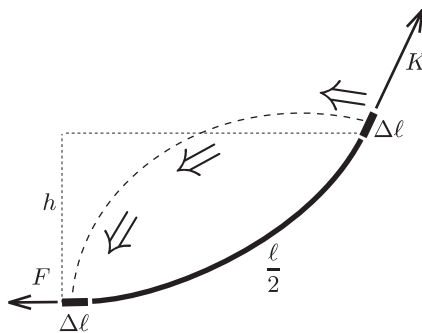
1. ábra

A szegnél ható erő nagysága, ami a lelógó függőleges kötéł súlyával egyenlő, Pitagorasz tétele alapján számítható:

$$(1) \quad K = \sqrt{\left(m^*\frac{\ell}{2}g\right)^2 + F^2} = m^*xg.$$



2. ábra



3. ábra

Képzeld el, hogy a kötelet a belógó rész közepénél elvágjuk, majd egy kicsiny, $\Delta\ell$ hosszúságú darabbal nagyon lassan feljebb húzzuk, végül pedig a szegnél a $\Delta\ell$ hosszúságú darabot kivágjuk és visszavisszük az elvágás helyére, majd ott visszatoldjuk a kötéłbe (3. ábra). Mivel ilymódon az eredeti állapothoz jutunk vissza, az összes munkavégzés nulla kell legyen: $W = K\Delta\ell - F\Delta\ell - m^*\Delta\ell gh = 0$, vagyis

$$(2) \quad K = F + m^*gh.$$

(1) és (2) összevetéséből a függőlegesen lelógó részek hosszára

$$x = \frac{\ell^2}{8h} + \frac{h}{2},$$

a kötéł keresett teljes hosszára pedig

$$L = 2x + \ell = \frac{\ell^2}{4h} + h + \ell$$

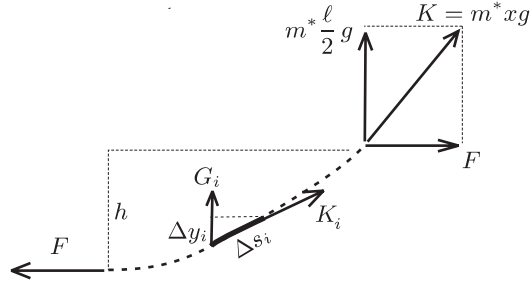
adódik, amit

$$L = \frac{(2h + \ell)^2}{4h}$$

alakban is fel lehet írni.

II. megoldás. Osszuk fel a kötelet (gondolatban) kicsiny, Δs_i hosszúságú darabkákra ($i = 1, 2, \dots, N$), és jelöljük a kis darabkák végpontjai közötti magasságkülönbséget Δy_i -vel (4. ábra). Ha G_i az i -edik kis darabka egyik végpontjánál ható függőleges irányú erő, F pedig az i -től független vízszintes erőkomponens, akkor az eredő K_i nagyságára fennáll:

$$(3) \quad G_i^2 + F^2 = K_i^2.$$



4. ábra

Fennáll továbbá, hogy

$$G_{i+1} - G_i \equiv \Delta G_i = m^* \Delta s_i g,$$

ahol m^* a kötélegységnyi hosszának tömege, valamint a köteldarabkákra ható erő és az érintő megegyező irányából:

$$(4) \quad \Delta y_i = \Delta s_i \frac{G_i}{K_i} = \frac{1}{m^* g} \frac{G_i \Delta G_i}{K_i} = \frac{1}{2m^* g} \frac{\Delta(G_i^2)}{K_i}.$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy bármilyen f mennyiség négyzetének kicsiny megváltozása:

$$(5) \quad \Delta f^2 \equiv (f + \Delta f)^2 - f^2 = 2f\Delta f + (\Delta f)^2 \approx 2f\Delta f,$$

ha $\Delta f \ll f$.

Képezzük a (3) egyenlet mindkét oldalának kicsiny megváltozását, vagyis hasonlítsuk össze az $(i + 1)$ -edik és az i -edik egyenletet, és alkalmazzuk az (5) azonosságot! Mivel F i -től független állandó,

$$G_i \Delta G_i = K_i \Delta K_i,$$

azaz (4) így írható:

$$\Delta y_i = \frac{1}{m^* g} \frac{G_i \Delta G_i}{K_i} = \frac{1}{m^* g} \frac{K_i \Delta K_i}{K_i} = \frac{1}{m^* g} \Delta K_i.$$

Összegezzük a fenti egyenletben szereplő Δy_i mennyiségeket a köté belőgő részének felére. Mivel $\sum \Delta y = h$, a 4. ábra jelöléseivel

$$h = \frac{1}{m^* g} (K - F).$$

Ez éppen az I. megoldás (2) egyenlete, amelyből (1) felhasználásával a köté teljes hosszára az

$$L = \frac{(2h + \ell)^2}{4h}$$

eredmény adódik.