

Megoldás. a) Az űrhajó a pályamódosítás után olyan ellipszis alakú pályán mozog, melynek egyik fókuszpontja a Föld középpontja. (Ez Kepler I. törvényének kiterjesztése az űreszköz mozgására.)

Jelölések: M a Föld tömege, R a Föld sugara, m az űrhajó tömege, f a Newton-féle gravitációs állandó, v_0 pedig az űrhajó sebessége a pályamódosítás előtt.

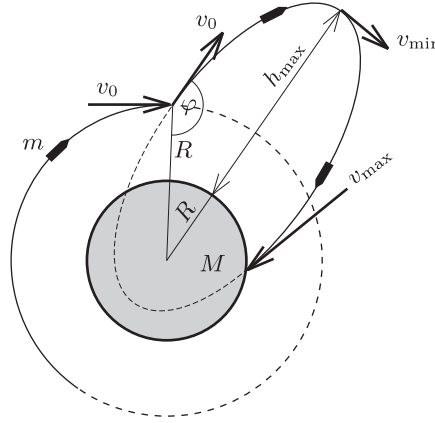
Az űrhajó eredetileg körmozgást végzett, így teljesül a körmozgás dinamikai feltétele:

$$f \frac{Mm}{(2R)^2} = \frac{mv_0^2}{2R},$$

ahonnan

$$v_0 = \sqrt{\frac{fM}{2R}} \approx 5,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Az űrhajó az ellipszis nagytengelyének távolabbi végpontjánál, a Föld felszínétől $h_{\max}$ távolságban lesz legmesszebb a Földtől, itt a sebessége (nagyságát jelöljük $v_{\min}$ -nel) merőleges a Föld középpontjából induló helyvektorra.



Alkalmazhatjuk Kepler II. törvényét (a Föld középpontjára vonatkoztatott perdületmegmaradási törvényt):

$$mv_0 \cdot 2R \sin \varphi = mv_{\min} \cdot (R + h_{\max}) \sin 90^\circ,$$

vagyis

$$v_{\min} = v_0 \frac{R}{R + h_{\max}}.$$

Az energiamegmaradás törvénye is érvényes:

$$-f \frac{Mm}{2R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -f \frac{Mm}{R + h_{\max}} + \frac{1}{2}mv_{\min}^2.$$

Behelyettesítve v_0 -t és $v_{\min}$ korábban kiszámított kifejezését:

$$-f \frac{Mm}{2R} + \frac{1}{2}mf \frac{M}{2R} = -f \frac{Mm}{(R + h_{\max})} + \frac{m}{2} \frac{fM}{2R} \left(\frac{R}{R + h_{\max}} \right)^2,$$

ahonnan algebrai átalakítások után egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{1}{2R}(R + h_{\max})^2 - 2(R + h_{\max}) + \frac{R}{2} = 0,$$

melynek számunkra érdekes (a földtávolsági pontnak megfelelő) megoldása

$$h_{\max} = (1 + \sqrt{3})R \approx 17\,400 \text{ km}.$$

Ekkora tehát az űrhajó maximális távolsága a Föld felszínétől.

b) A pályamódosítás és a becsapódás pillanata közötti mozgásra is alkalmazhatjuk az energiamegmaradás törvényét. A becsapódás sebességének nagyságát $v_{\max}$ -szal jelölve:

$$\begin{aligned} -f \frac{Mm}{2R} + \frac{1}{2}mv_0^2 &= -f \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_{\max}^2, \\ -f \frac{Mm}{2R} + \frac{1}{2} \frac{mfM}{2R} &= -f \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_{\max}^2, \\ v_{\max}^2 &= \frac{3fM}{2R}, \end{aligned}$$

tehát a keresett becsapódási sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt{3} v_0 \approx 9,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés. A feladatban leírt pályamódosítás végrehajtásához az űrhajó teljes tömegével összemérhető mennyiségű hajtóanyagra lenne szükség, emiatt az a gyakorlatban megvalósíthatatlan.