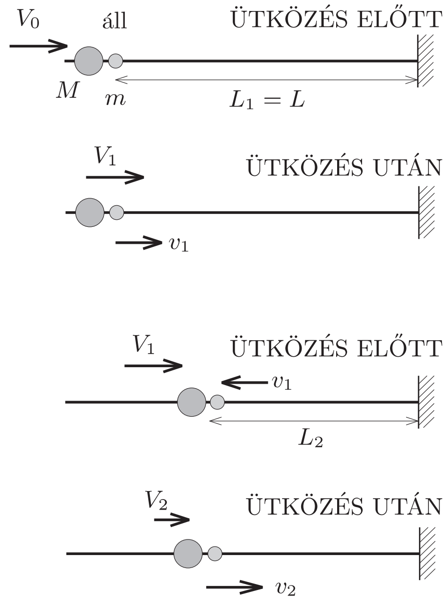
I. megoldás. Jelöljük a M tömegű golyó n-edik ütközés utáni sebességét V_n-nel, a m tömegű golyó sebességét v_n-nel, az n-edik ütközés helye és a fal közötti távolságot pedig L_n-nel! (Az első 2 ütközés hely- és sebességadatait az *ábra* mutatja.



A két golyó ütközéseire nyilván érvényes a lendület és a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Írjuk fel ezeket a megmaradási törvényeket az $(n+1)$-edik ütközésre:

(1) $$\frac{1}{2}M\left(V_n^2 - V_{n+1}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_{n+1}^2 - v_n^2\right),$$

(2) $$M(V_n - V_{n+1}) = m(v_{n+1} + v_n).$$

A fenti két egyenletet egymással elosztva kapjuk:

$$V_n + V_{n+1} = v_{n+1} - v_n,$$

vagyis

(3) $$V_n + v_n = v_{n+1} - V_{n+1}.$$

Az ábrán szereplő két ütközés között a M tömegű test V_1 sebességgel $L_1 - L_2$ utat, a m tömegű test pedig v_1 sebességgel $L_1 + L_2$ utat tesz meg ugyanannyi idő alatt:

$$\frac{L_1 - L_2}{V_1} = \frac{L_1 + L_2}{v_1},$$

innen következik, hogy

$$L_2 = L_1 \frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1}.$$

Hasonló módon számítható az $(n-1)$-edik és az n-edik ütközés között eltelt idő:

$$\frac{L_{n-1} - L_n}{V_{n-1}} = \frac{L_{n-1} + L_n}{v_{n-1}},$$

ahonnan

(4) $$L_n = L_{n-1} \frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}}.$$

A (3) összefüggés szerint (4) nevezőjében $v_{n-1} + V_{n-1}$ helyébe $v_n - V_n$ írható, vagyis fennáll:

(5) $$L_n(v_n - V_n) = L_{n-1}(v_{n-1} - V_{n-1}).$$

Találtunk tehát egy olyan mennyiséget, az $L_k(v_k - V_k)$ kifejezést, amely minden k-ra ugyanakkora, így a legelső és a falhoz legközelebb történő N-edik ütközésre is megegyezik:

(6) $$L_N = L_1 \frac{v_1 - V_1}{v_N - V_N}.$$

Az első ütközés helye a faltól $L_1 = L$ távolságra történik, továbbá a (3) egyenlet alapján $v_1 - V_1 = v_0 + V_0 = V_0$ (hiszen kezdetben a m tömegű golyó nyugalomban volt, azaz $v_0 = 0$). Ezek szerint

(7) $$L_N = L \frac{V_0}{v_N - V_N}.$$

Tegyük fel, hogy a M tömegű golyó sebessége az N-edik ütközés után éppen nullára csökken, $V_N = 0$ lesz. (Ha nem is állna meg teljesen a M tömegű golyó, de a következő ütközés után már „visszafele" haladna, akkor is jó közelítéssel nullának vehető a sebessége, hiszen az $M \gg m$ feltétel azt jelenti, hogy a nagyobb tömegű golyó csak nagyon kis adagokban veszíti el a sebességét.)

Mivel a nagyobb golyó sebessége nulla, ezért a teljes kezdeti mozgási energiát már átadta a kis golyónak:

$$\frac{1}{2} M V_0^2 = \frac{1}{2} m v_N^2, \quad \text{ahonnan} \quad v_N = V_0 \sqrt{\frac{M}{m}}\,.$$

Visszahelyettesítve (7)-be és $V_N = 0$-t is kihasználva végül a keresett távolságra az

$$L_{\min} = L \sqrt{\frac{m}{M}}$$

eredményt kapjuk.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit követjük. Az energia- és a lendületmegmaradás törvényéből következik, hogy a m tömegű golyó az első ütközés után

$$v_1 = \frac{2V_0}{1 + \frac{m}{M}} \approx 2V_0$$

sebességgel kezd mozogni, tehát a mozgási energiája

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \approx 2m\, V_0^2.$$

Ezek után úgy is felfoghatjuk az eseményeket, mintha a nagy golyó egy kis (kezdetben AL térfogatú) csőben *adiabatikusan* összenyomna egy olyan gázt, amelynek belső energiája a kis golyó mozgási energiája, azaz kezdetben E_1, és szabadsági foka 1 (mivel a „gázrészecske" csak egyetlen dimenzióban, a vízszintes rúd irányába mozdulhat el). A cső A keresztmetszetét önkényesen választhatjuk, nagysága a továbbiak szempontjából lényegtelen.

Megjegyzés. Ez a leírás nem teljesen pontos, hiszen a szokásos esettel ellentétben itt most egyetlen részecske alkotja a „gázt", és emiatt a „dugattyú" (vagyis a M tömegű test) nem folyamatosan, hanem lökésszerűen fejt ki erőt a másik testre. Igaz ugyan, hogy ezek az erőlökések csak kezdetben ritkák, a kis test sebességének növekedtével egyre jobban összesűrűsödnek, majdnem folytonossá válnak. Az egyetlen részecske problémát még kikerülhetjük, ha nagyon nagy számú vízszintes rudat képzelünk el, mindegyiken egy-egy m tömegű, kezdetben álló golyó, s ezeknek ütközik egyetlen, nagy tömegű „dugattyú". Ez a kép már jobban emlékeztet a kinetikus gázelmélet leírásmódjára, de a dugattyú kezdetben lökésszerű erőkifejtését nem oldja meg.

A leírtak miatt a „gázmodell" alapján számított eredményt nem fogjuk számszerűen pontosnak tekinteni, inkább csak *nagyságrendi becslésként* értelmezhetjük.

Adiabatikus állapotváltozás esetén

(8) $$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa,$$

ahol $\kappa = (f+2)/f$, jelen esetben $f = 1$ miatt $\kappa = 3$. A gáz belső energiája

$$= \frac{f}{2} NkT = \frac{1}{2} pV,$$

vagyis a kezdeti és a (legjobban összenyomott) végállapotra felírva:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}.$$

Ez az arány (8) felhasználásával így is írható:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1^{1-\kappa}}{V_2^{1-\kappa}} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2.$$

A kezdeti állapotban $L_1 = L$ és $E_1 = 2m\,V_0^2$, a végállapotban pedig $L_2 = L_{\min}$ a keresett megközelítési távolság. Tudjuk még, hogy a 2-es állapotban a „gáz” energiája $E_2 = \frac{1}{2}M\,V_0^2$, hiszen a „dugattyú” sebessége a falhoz legközelebbi helyzetben pontosan (vagy jó közelítéssel) nulla, így a rendszer teljes mechanikai energiája a „gázrészecskére” jut.

Ezek szerint a keresett távolságra fennáll:

$$\frac{L_{\min}}{L} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{\frac{2mV_0^2}{\frac{1}{2}M\,V_0^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Ez az eredmény egy 2-es faktorban tér el az I. megoldás „pontos” végeredményétől, de ez az eltérés – az említett okok miatt – érthető.

Megjegyzés. A golyók sebessége helyett bevezethetjük az $x_i = \sqrt{M}\,V_i$ és $y_i = \sqrt{m}\,v_i$ új változókat. Ezekkel kifejezve az energiamegmaradás törvénye így írható fel: $x_i^2 + y_i^2 =$ állandó, vagyis az ütközések során az átskálázott sebességkoordináták $x - y$ síkján egy kör mentén mozog a rendszer. Belátható, hogy minden egyes ütközésnél

$$\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{m/M} \approx \sqrt{m/M}$$

szöggel kell odébblépnünk ezen a körön, összesen tehát (egy negyedkörnyi elfordulás után)

$$N = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{M}{m}} \gg 1$$

számú ütközés zajlik le, amíg a M tömegű golyó legjobban megközelíti a falat.