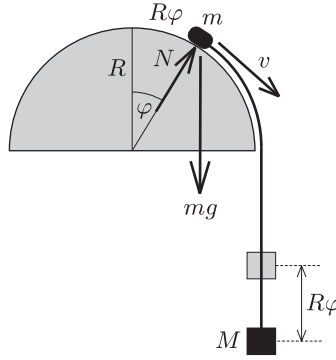


Megoldás. Legyen a m tömegű testet a félgömb középpontjával összekötő egyenes és a függőleges szöge φ . Eddig a helyzetig a félgömbtől $R\varphi$ hosszúságú fonál futott le, ennyivel került lejjebb a M tömegű test; a m tömegű test függőleges elmozdulása pedig $R(1 - \cos \varphi)$.



A testek v sebessége (ami a fonál okozta kényszer miatt a két testre ugyanakkora) az energiamegmaradás törvényéből számítható ki:

$$(1) \quad \frac{1}{2}(M + m)v^2 = MgR\varphi + mgR(1 - \cos \varphi), v^2 = 2gR \frac{M\varphi + m(1 - \cos \varphi)}{M + m}.$$

Legyen a félgömb által a m tömegű testre kifejtett kényszererő N . Ekkor a m tömegű testre vonatkozó Newton-egyenlet radiális irányban:

$$mg \cos \varphi - N = m \frac{v^2}{R}.$$

Amikor a lecsúszó test éppen elválik a félgömbtől, a kényszererő nulla:

$$mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R},$$

ami (1) felhasználásával így írható:

$$\begin{aligned} mg \cos \varphi &= 2mg \frac{M\varphi + m(1 - \cos \varphi)}{M + m}, \\ (M + m) \cos \varphi &= 2M\varphi + 2m(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

vagyis

$$(2) \quad m(3 \cos \varphi - 2) = M(2\varphi - \cos \varphi).$$

a) Az elválás szöge akkor lesz $\varphi = 45^\circ = \pi/4$ radián, ha

$$m \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} = M \frac{\pi - \sqrt{2}}{2},$$

vagyis a tömegarány:

$$\frac{m}{M} = \frac{\pi - \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4} = 7,12.$$

b) Ha $m \gg M$, a (2) egyenlet jobb oldala elhanyagolható (nullának vehető), így az elválás szögére $3 \cos \varphi - 2 = 0$ adódik, ahonnan

$$\varphi = \arccos \frac{2}{3} = 48,2^\circ.$$

c) Ha $m \ll M$, a (2) egyenlet bal oldala hanyagolható el, ekkor

$$2\varphi - \cos \varphi = 0.$$

Ez az egyenlet csak numerikusan oldható meg, gyökének értéke kb. $\varphi = 25,8^\circ$.

A félgömbtől való elválás szöghelyzete tetszőleges tömegarálynál a fenti két érték közé esik.