

**I. megoldás.** A véges méretű „dobozba” zárt  $m$  tömegű részecske a kvantum hatások miatt nem lehet nyugalomban, hanem valamekkora, átlagosan  $p$  nagyságú impulzussal rendelkezik. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint

$$(1) \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi},$$

ahol  $\Delta x \approx d$  a neutron helyének bizonytalansága,  $\Delta p \approx p$  pedig az impulzus határozatlansága.

*Megjegyzések.* 1. Az (1) egyenlőtlenség jobb oldalán írhattunk volna  $h$ -t,  $h/2$ -t vagy más, hasonló kifejezést, hiszen csak a bizonytalanság *nagyságrendjét* kívántuk megadni. Pontosabb számértéknek csak akkor lenne értelme, ha megmondanánk, mit is jelent pontosan a hely és az impulzus bizonytalansága, de erre a *nagyságrendi becslésnél* nem törekszünk.

2. Az impulzus átlagos értéke a bezárt részecskénél nyilván nulla, hiszen a neutron nem tud elmozdulni a dobozból. Emiatt az impulzus határozatlansága (az átlagértéktől való eltérése) az impulzus nagyságával becsülhető.

Ezek szerint – (1) határesetét tekintve – a neutron impulzusa

$$p \approx \pm \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{d},$$

a részecske sebessége pedig

$$v \approx \pm \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{md}.$$

Ha ezt az eredményt (jobb híján *klasszikus fizikai* hasonlaltal élve) úgy értelmezzük, hogy a részecske ide-oda pattog a doboz szemközti falai között, akkor mondhatjuk: egy kiszemelt falon  $\Delta t = \frac{2d}{v}$  időközönként  $2mv$  impulzusváltozás történik, tehát a részecske a falra

$$F = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{mv^2}{d} = \frac{h^2}{16\pi^2 m} \cdot \frac{1}{d^3}$$

nagyságú erőt, azaz

$$(2) \quad p = \frac{F}{d^2} = \frac{h^2}{16\pi^2 m} \cdot \frac{1}{d^5}$$

nyomást fejt ki. Numerikusan (SI egységekben számolva)

$$p \approx 1,6 \cdot 10^{-42} \cdot \frac{1}{d^5} [\text{N m}^3],$$

ami meglehetősen kicsiny érték (hacsak a doboz  $d$  mérete nem nagyon kicsiny).

**II. megoldás.** A kvantumelmélet szerint egy  $d$  oldalélű dobozba zárt részecske alapállapotát olyan hullámok szorzatával írhatunk le, melyek félhullámhossza a doboz mérete ( $\lambda/2 = d$ ), a megfelelő impulzusok tehát (a de Broglie-féle összefüggésnek megfelelően)

$$(3) \quad p_x = p_y = p_z = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d}.$$

Egy ilyen „kvantumrészecske” energiája (ami jelen esetben tisztán mozgási energia)

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

vagyis (3) felhasználásával

$$E(d) = \frac{3h^2}{8m} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

Képzeliük el, hogy a doboz oldalait óvatosan  $\Delta d \ll d$  értékkel lerövidítjük, vagyis a doboz térfogatát

$$\Delta V = d^3 - (d - \Delta d)^3 \approx 3d^2 \Delta d$$

értékkel lecsökkentjük. Ekkor  $W = p \cdot \Delta V$  munkát kell végeznünk, ahol  $p$  a keresett nyomás, miközben a részecske energiája  $\Delta E = E(d - \Delta d) - E(d)$  mértékben megnő.

Másrészt a munkatétel szerint  $W = \Delta E$ , vagyis

$$(4) \quad p \cdot 3d^2 \Delta d = \frac{3h^2}{8m} \cdot \left( \frac{1}{(d - \Delta d)^2} - \frac{1}{d^2} \right) = \frac{3h^2}{8m} \cdot \frac{2d \Delta d - \Delta d^2}{d^2(d - \Delta d)^2} \approx \frac{3h^2}{4md^3} \Delta d.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy  $\Delta d \ll d$ .)

A (4) egyenletből a keresett nyomásra

$$(5) \quad p = \frac{h^2}{4m} \cdot \frac{1}{d^5}$$

adódik, ami nagyságrendileg megegyezik az I. megoldás (2) képletével, tehát azzal egyenértékű *becslésnek* tekinthető.

*Megjegyzések.* 1. A dobozba zárt részecske energiaszintjei diszkréttek, és  $d$  csökkentésével a köztük levő távolság egyre nagyobb lesz. Ha a doboz  $T$  hőmérsékletű környezetben van, a  $kT$  nagyságrendű termikus gerjesztés kellően kicsi  $d$ -re nem elég ahhoz, hogy a neutronokat kitérítse az alapállapotból. Kicsiny  $d$ -re tehát a neutron mindig alapállapotban tartózkodik. Ellenkező esetben (vagyis amikor  $d$  nem túl kicsi, vagy  $T$  viszonylag nagy) a gerjesztett állapotok járulékát is figyelembe kell venni.

2. Klasszikus határesetben, amikor a részecske átlagenergiája  $3kT/2$ , és ennek megfelelően a sebessége  $\sqrt{3kT/m}$ , a falakra kifejtett nyomás így számítható ki:

$$p = \frac{3kT}{d^3}.$$

A hőmozgásból származó nyomás szobahőmérsékleten és például 1 nm-es dobozméretnél kb. 100-szor nagyobb, mint a kvantumos eredetű nyomás. Ha viszont még ennél is (sokkal) kisebb méretű dobozba sikerülne bezárni egy neutron, annak kvantumos eredetű nyomása válna meghatározóvá.

3. A kvantumos eredetű nyomás (nagyságrendileg helyes) képletét dimenzionális megfontolásokkal is kitalálhatjuk. A nyomás nyilván függhet a doboz méretétől, a részecske tömegétől és a Planck-állandótól. Ezekből nyomás dimenziójú mennyiséget csak

$$p = \text{állandó} \cdot \frac{h^2}{md^5}$$

módon lehet „kikeverni”, ahol az állandó egy 1 nagyságrendű, dimenziótlan szám.

A *dimenzióanalízis* módszere akkor alkalmazható biztonsággal, ha jó érvekkel meg tudjuk indokolni, hogy a keresett mennyiség mitől *nem* függ! Esetünkben a nyomás – elvben – függhetne a Boltzmann-állandótól, a fénysebességtől, vagy akár a Newton-féle gravitációs állandótól, de ténylegesen nincs kapcsolat a felsorolt állandók és a kvantumos eredetű nyomás között.