I. megoldás. A kerékpárra többféle erő is hat, de ezeknek csak a mozgás irányába eső komponensét kell figyelembe vegyük. A nehézségi erőnél ez a komponens $\pm mg\sin\alpha$ (ahol α a lejtő hajlásszöge, az előjel pedig a haladás irányától függ). A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányosnak vehető, mert a kerékpáros körül (egységnyi hosszúságú úton) megkavart levegő mozgási energiájával arányos.

Megjegyzés. A sebesség első hatványával arányos közegellenállási erő csak nagyon kicsi sebességeknél és nagyon kis méretű testeknél lépne fel, de azoknál is csak akkor, ha a mozgó test alakja időben állandó. A kerékpárosra egyik feltétel sem teljesül, tehát a v-vel arányos „viszkózus" fékezőerő feltételezése nem reális.

A kerékpáros lába által a pedálokra kifejtett erő forgatónyomatékot eredményez, ami – az áttételeken keresztül – a gumiabroncs által a talajra kifejtett, azt hátrafelé toló erővé számolható át. Ennek az erőnek az ellenereje a talaj által a kerékre kifejtett súrlódási erő.

Jelöljük a felfelé, lefelé és vízszintesen haladó kerékpáros csúcssebességét rendre v_1-gyel, v_2-vel és v_3-mal. A kerékpár mindhárom esetben egyenletesen halad, gyorsulása tehát nulla. A lejtőn felfelé haladó kerékpárosra felírható mozgásegyenlet:

$$F_1 - mg\sin\alpha - kv_1^2 = 0, \tag{1}$$

ahol F_1 a kerékpáros lábának „erőkifejtésével" arányos, a kerékpárt menetirányban előrefelé toló súrlódási erő, k pedig a közegellenállási erő képletében szereplő állandók szorzata. Hasonló egyenleteket írhatunk fel a lejtőn lefelé mozgó, illetve a vízszintes úton haladó kerékpárra is:

$$F_2 + mg\sin\alpha - kv_2^2 = 0, \tag{2}$$

$$F_3 - kv_3^2 = 0. \tag{3}$$

A feladat szövege szerint a kerékpáros mindhárom esetben ugyanakkora „erőbedobással" teker. Értelmezzük ezt az állítást úgy, hogy a kerékpáros által kifejtett *erő* mindhárom esetben ugyanakkora, azaz

$$F_1 = F_2 = F_3. \tag{4}$$

(Nem nyilvánvaló ez az értelmezés, hiszen a sebességváltós kerékpároknál a szükséges „pedálerő" megfelelő áttételekkel jelentősen csökkenthető, vagy akár növelhető is.)

Adjuk össze (1) és (2) egyenletet:

$$F_1 + F_2 - k\big(v_1^2 + v_2^2\big) = 0,$$

s vessük össze az eredményt (3)-mal és (4)-gyel:

$$2F_3 - k\big(v_1^2 + v_2^2\big) = 0,$$

$$2kv_3^2 = k\big(v_1^2 + v_2^2\big),$$

ahonnan

$$v_3 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{12^2 + 36^2}{2}}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 27\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Megjegyzés. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha feltételezzük, hogy az eddig felsorolt erőhatásokon kívül még a gördülő ellenállás és a kerékpár csapágyainak és fogaskerekeinek súrlódása is számottevő. Ilyenkor az (1) mozgásegyenlet így módosul:

$$F - mg\sin\alpha - kv_1^2 - k^* - \mu mg\cos\alpha = 0,$$

és hasonlóan a másik két egyenlet. (k^* a csapágysúrlódásra, μ pedig a gördülő ellenállásra jellemző állandó.) A mozgásegyenletekből most

$$v_3^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{mg}{k}\cdot\mu(1-\cos\alpha) \tag{5}$$

adódik. Tekintettel arra, hogy a kerékpározásra alkalmas utak meredeksége nem túl nagy (azaz $\cos\alpha \approx 1$), továbbá a gördülő ellenállás együtthatója általában igen kicsi, (5) jobb oldalának utolsó tagja elhanyagolható, s ebben a közelítésben az eredmény valóban megegyezik a fentebb számítottal.

II. megoldás. Ha a feladat (laza megfogalmazású) szövegében szereplő „teljes erőbedobás" kifejezést a kerékpáros maximális *teljesítményeként* értelmezzük, akkor – az I. megoldás jelöléseit követve – (4) helyett a teljesítmények egyenlőségét írhatjuk fel:

$$F_1\cdot v_1 = F_2\cdot v_2 = F_3\cdot v_3.$$

Innen (1) és (2) felhasználásával

$$v_1\cdot mg\sin\alpha + kv_1^3 = kv_2^3 - v_2\cdot mg\sin\alpha,$$

azaz

$$\frac{mg}{k}\sin\alpha = \frac{v_2^3 - v_1^3}{v_1 + v_2}$$

adódik. Másrészt $F_1 \cdot v_1 = F_3 \cdot v_3$, valamint (1) és (3) miatt fennáll

$$v_1 \cdot mg\sin\alpha + kv_1^3 = kv_3^3,$$

vagyis

$$v_3^3 = v_1^3 + v_1 \cdot \frac{mg}{k}\sin\alpha = v_1^3 + v_1 \cdot \frac{v_2^3 - v_1^3}{v_1 + v_2} = \frac{v_1 v_2\left(v_1^2 + v_2^2\right)}{v_1 + v_2}.$$

A keresett sebesség tehát

$$v_3 = \sqrt[3]{\frac{v_1 v_2\left(v_1^2 + v_2^2\right)}{v_1 + v_2}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 36 \cdot \left(12^2 + 36^2\right)}{48}}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 23{,}5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Megjegyzések. 1. Figyelemre méltó, hogy a kerékpáros, mint a mozgó rendszer része, csak ún. *belső erőt* tud kifejteni, ami – a *(külső)* súrlódási erő nélkül – nem tudná mozgásban tartani a járművet. Ugyanakkor a súrlódási erő *nem* végez munkát, hiszen a csúszásmentesen gördülő kerék legalsó pontja a talajhoz képest nem mozdul el; a munkavégzés a belső erők támadáspontjánál, a pedáloknál történik.

2. A sík terepen elérhető sebesség nyilván v_1 és v_2 közötti érték, azok – valamilyen értelemben vett – középértéke kell legyen. Az I. megoldásnak megfelelő értelmezés esetén ez a középérték (Q) a négyzetes közép, míg a II. megoldásban szereplő eredmény $\sqrt[3]{G^2 \cdot Q^2/A}$, ahol A a számtani, G pedig a mértani közepet jelöli.