

Megoldás. Adottak:

$$m = 500 \text{ kg}, \quad h = 400 \text{ km} = 4 \cdot 10^5 \text{ m},$$

$$r_1 = R + h, \quad r_2 = R + \frac{h}{2},$$

$$F_{\text{lég}} = K \rho v^2 \text{ (ahol } K = 0,23 \text{ m}^2), \quad \Delta r = -\varepsilon \text{ (} = -100 \text{ m)}.$$

Táblázatból vehető a Föld egyenlítői R sugara, M tömege és a gravitációs törvényben szereplő γ állandó:

$$R = 6378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2).$$

a) A feladatban megfogalmazott feltételek szerint „a műholdak a Föld felszínéhez közeledve mindvégig közelítően körpályán haladnak”, ezért jó közelítésben írhatjuk:

$$F_{\text{grav}} = m a_{\text{cp}}, \quad \gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}.$$

Ennek alapján

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}},$$

amelybe behelyettesítve r_1 és r_2 értékeit, megkapjuk a két sebességet:

$$v_1 = 7669,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = 7784,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A műhold sebességváltozása tehát

$$v_2 - v_1 = 115,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} > 0.$$

A légellenállás következtében nőtt a műhold sebessége! Szokás ezt űrhajózási paradoxonnak is nevezni. A légellenállási, súrlódási erő munkája szükségképpen negatív, mégis nő a műhold mozgási energiája! Hogyan lehetséges ez? Erre kaphatunk választ a feladat b) és c) részének megoldása során. Érdekes lesz mindkét esetben abból indulunk ki, hogyan változik meg a műhold mechanikai összenergiája, vagyis a kinetikus és potenciális energia összege. Ez az, ami a légellenállási erő hatására csökkenhet.

b) A légellenállási erő teljesítménye:

$$\vec{F}_{\text{lég}} \cdot \vec{v} = -F_{\text{lég}} \cdot v < 0.$$

Ez egyenlő az összenergia változási sebességével:

$$(1) \quad -F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t}.$$

Az összenergia kinetikus és potenciális részből áll:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r}\right).$$

E két rész azonban kifejezhető egymásból. Írjuk fel újra a dinamika alaptörvényét:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad \text{azaz} \quad \gamma \frac{mM}{r} = mv^2,$$

amiből kapjuk:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{r} = \frac{1}{2}(-E_{\text{pot}}).$$

Az összenergiát tehát így is felírhatjuk:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} - 2E_{\text{kin}} = -E_{\text{kin}} < 0.$$

(Az, hogy az összenergia negatív, nem kell, hogy megijesszen senkit, az atomfizikában számos példát látunk erre.)

Most tehát (1) így írható:

$$-F_{\text{lég}} \cdot v = -\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\Delta t},$$

illetve

$$F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{\Delta(\frac{1}{2}mv^2)}{\Delta t} = mv \frac{\Delta v}{\Delta t} = mv a_t.$$

A légellenállásra egy érdekes kifejezést kaptunk:

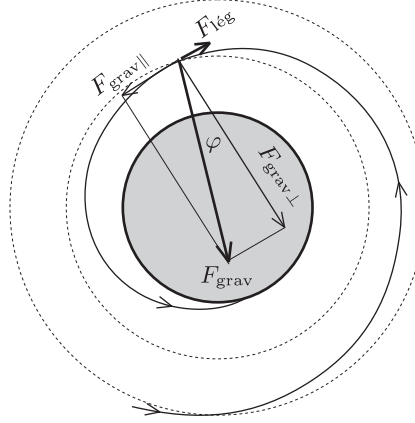
$$(2) \quad F_{\text{lég}} = ma_t.$$

Az ma_t kifejezés a tangenciális (pályamenti) eredő erőt adja, amely most a gravitációs erő pályamenti összetevőjének és a légellenállási erőnek az eredője (1. ábra), tehát

$$ma_t = F_{\text{grav}\parallel} - F_{\text{lég}}.$$

Ezt vessük össze (2)-vel:

$$F_{\text{lég}} = F_{\text{grav}\parallel} - F_{\text{lég}}.$$



1. ábra. A feladat számadataival: $F_{\text{grav}} = 4,6 \text{ kN}$, $F_{\text{lég}} = 5,6 \text{ mN}$,
 $\varphi = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,25''$. A vázlatos ábra *nem méretarányos*

Az az egyszerű összefüggés tehát, amely a légellenállási erő, valamint a műholdra ható két erő (gravitációs és légellenállási) eredőjének pályamenti összetevője között fennáll az, hogy *e kettő nagysága egyenlő egymással*.

c) Ismét az összenergia változásából érdemes kiindulnunk, de az összenergiát most ne a kinetikus, hanem a potenciális energiával fejezzük ki, felhasználva az $E_{\text{kin}} = -E_{\text{pot}}/2$ összefüggést:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{E_{\text{pot}}}{2} + E_{\text{pot}} = \frac{E_{\text{pot}}}{2}.$$

$$\frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t},$$

ami Δr -rel szorozva és osztva így is írható:

$$\frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta r} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Mit mondhatunk a sugár változási sebességéről? Ismert adat, hogy egyetlen fordulat során a pályasugár $\varepsilon = 100$ méterrel csökken, tehát

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{-\varepsilon}{T} = \frac{-\varepsilon}{\frac{2r\pi}{v}}.$$

Határozzuk meg a potenciális energia és a pályasugár változásának viszonyát:

$$\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta r} = \frac{\Delta(-\gamma \frac{mM}{r})}{\Delta r} = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Most már felírhatjuk az (1) egyenletet, amelyben az összenergiát a potenciális energiával fejezzük ki:

$$-F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta r} \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

$$-F_{\text{lég}} \cdot v = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r^2} \frac{-\varepsilon}{\frac{2r\pi}{v}},$$

$$F_{\text{lég}} = \frac{1}{4\pi} \gamma \frac{mM}{r^3} \varepsilon,$$

$$K_{\varrho} v^2 = \frac{1}{4\pi} \gamma \frac{mM}{r^3} \varepsilon.$$

Ebben az egyenletben már csak ϱ az egyetlen ismeretlen, éppen ezt kellett kiszámítanunk! De hogy még szebb, elegánsabb formulát kapjunk, használjuk fel újra a $v^2 = \gamma M/r$ összefüggést, így a következőt kapjuk:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi K} \frac{m}{r^2} \varepsilon.$$

$r = r_2$, valamint ε megadott értékét behelyettesítve

$$\varrho = 4 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Kiegészítés: Az a) kérdésre $mg = mv^2/r$ felhasználásával is válaszolhatunk, ha figyelembe vesszük a gravitációs gyorsulás magasságfüggését: $g = g_0 \left(1 - \frac{h}{r}\right)^2$. Ezzel

$$v = \sqrt{gr} = \left(1 - \frac{h}{r}\right) \sqrt{g_0 r},$$

ahol g_0 az egyenlítői gravitációs gyorsulás, amely azonban a táblázatban adott egyenlítői nehézségi gyorsulásnál nagyobb! A különbség a Föld forgásából adódó „centri” gyorsulás.