3. feladat. Egyszerű atommagmodell

1. részfeladat.

a) Egyszerű kockarácsot feltételezve, mennyi a nukleonok kitöltési tényezője?

A kocka oldaléle (a rácsállandó) legyen a. Az egymással érintkező nukleongömbök sugara így $r = \frac{a}{2}$. Egy kockára éppen nyolc nyolcad-gömb jut, tehát az f kitöltési tényező egyszerűen egy gömb és a kocka térfogatának aránya:

$$f = \frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52. \tag{1}$$

b) Mekkora az A tömegszámú atommag tömegsűrűsége, töltéssűrűsége és sugara?

Az atommag tömegsűrűsége:

$$\varrho_m = f\frac{m_N}{V_N} = f\frac{m_N}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = 0{,}52 \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{\frac{4}{3}\left(0{,}85 \cdot 10^{-15}\right)^3\pi} \approx 3{,}40 \cdot 10^{17}\ \text{kg/m}^3. \tag{2}$$

Az atommag töltéssűrűsége:

$$\varrho_c = \frac{f}{2}\frac{e}{V_N} = \frac{f}{2}\frac{e}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = \frac{0{,}52}{2} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{\frac{4}{3}\left(0{,}85 \cdot 10^{-15}\right)^3\pi} \approx 1{,}63 \cdot 10^{25}\ \text{C/m}^3, \tag{3}$$

ahol figyelembe vettük, hogy csak a protonoknak van töltésük, ugyanannyi neutronnak nincs.

Ha a nukleonok száma A, akkor az atommag térfogata így fejezhető ki:

$$V = \frac{AV_N}{f}. \tag{4}$$

Ennek megfelelően az atommag sugara:

$$R = r_N\left(\frac{A}{f}\right)^{1/3} = \frac{0{,}85}{0{,}52^{1/3}}A^{1/3} \approx 1{,}06\ \text{fm} \cdot \text{A}^{1/3}, \tag{5}$$

ahol az 1,06 fm-es szorzótényezőt a továbbiakban r_0-lal jelöljük.

2. részfeladat.

Mekkora az A tömegszámú atommag kötési energiája?

A felületi nukleonokat egy $2r_N$ vastagságú héjban képzeljük el az atommag felszínén. Így kiszámíthatjuk a felületi nukleonok számát:

$$A_{\text{felület}} = f\frac{V_{\text{felület}}}{V_N}, \tag{6}$$

ahol a felszíni gömbhéj térfogata:

$$V_{\text{felület}} = \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R - 2r_N)^3\pi. \tag{7}$$

A kötési energiához a felületi nukleonok feleakkora taggal járulnak hozzá, mint az atommag belsejében lévők:

$$E_b = (A - A_{\text{felület}})a_V + A_{\text{felület}}\frac{a_V}{2}. \tag{8}$$

Az (5), (6) és (7) összefüggések figyelembevételével a (8) kötési energiára ezt az eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} E_b &= Aa_V - A_{\text{felület}}\frac{a_V}{2} = Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V = \\ &= \left(15{,}8A - 38{,}2A^{2/3} + 61{,}6A^{1/3} - 33{,}1\right)\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{9}$$

3. részfeladat.

a) Mekkora az atommag elektrosztatikus energiája?

Ha a megadott képletben Q_0 helyére Ze értéket helyettesítünk, akkor az atommag elektrosztatikus energiájára ezt az összefüggést kapjuk:

$$U_C = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\varepsilon_0 R}. \tag{10}$$

Vegyük figyelembe, hogy a protonok önmagukra nem hatnak, tehát (az útmutatás szerint) Z^2 helyére $Z(Z-1)$-et kell írnunk:

$$U_C = \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\varepsilon_0 R}. \tag{11}$$

b) Hogyan írható fel az atommag teljes kötési energiája?

A teljes kötési energia úgy írható fel, hogy a (9) kifejezésből kivonjuk a (11) Coulomb-tagot, mert a pozitív elektrosztatikus energia csökkenti az atommag kötési energiáját. (A kötési energiát úgy értelmezzük, mint az atommag nukleonokra bontásához szükséges minimális energiát.) A számolás során az atommag R sugarára az (5) összefüggést használjuk, továbbá kihasználjuk azt is, hogy $Z \approx \dfrac{A}{2}$:

$$\begin{aligned} E_b^{\text{teljes}} &= E_b - U_C = \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

4. részfeladat.

a) Mekkora a bomlástermékek együttes mozgási energiája?

A bomlástermékek együttes mozgási energiáját a kötési energiák különbségéből, illetve a két fél mag $\left(\dfrac{Z}{2} = \dfrac{A}{4}\right)$ Coulomb-energiájának figyelembevételéből határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} E_{\text{mozg}}(d) &= 2E_b^{\text{teljes}}\left(\frac{A}{2}\right) - E_b^{\text{teljes}}(A) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{A^2e^2}{4^2 d} = \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V\left(2^{1/3}-1\right) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V\left(2^{2/3}-1\right) - 4fa_V - \\ &\quad - \frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\frac{A^{5/3}}{4}\left(2^{-2/3}-1\right) - \frac{A^{2/3}}{2}\left(2^{1/3}-1\right)\right] - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{A^2e^2}{16d}. \end{aligned} \tag{13}$$

Vegyük észre, hogy az Aa_V típusú fő járulékok kiestek.

b) Mekkora tömegszám esetén lehetséges bomlás?

A mozgási energia fenti (13) kifejezésébe helyettesítsük be a $d = 2R\left(\dfrac{A}{2}\right)$ távolságot:

$$\begin{aligned} E_{\text{mozg}} &= 2E_b^{\text{teljes}}\left(\frac{A}{2}\right) - E_b^{\text{teljes}}(A) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2^{1/3}A^2e^2}{16\cdot 2r_N A^{1/3} f^{-1/3}} = \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V\left(2^{1/3}-1\right) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V\left(2^{2/3}-1\right) - 4fa_V - \\ &\quad - \frac{e^2 f^{1/3}}{\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\frac{3}{80}\left(2^{-2/3}-1\right) + \frac{2^{1/3}}{128}\right]A^{5/3} - \frac{e^2 f^{1/3}}{\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\frac{3}{40}\left(2^{1/3}-1\right)\right]A^{2/3} = \\ &= \left(0{,}02203\,A^{5/3} - 10{,}0365\,A^{2/3} + 36{,}175\,A^{1/3} - 33{,}091\right)\ \text{MeV}. \end{aligned} \tag{14}$$

A megadott tömegszámokat numerikusan behelyettesítve a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned} A &= 100 &&\rightarrow && E_{\text{mozg}} = -33{,}95\ \text{MeV}, \\ A &= 150 &&\rightarrow && E_{\text{mozg}} = -30{,}93\ \text{MeV}, \\ A &= 200 &&\rightarrow && E_{\text{mozg}} = -14{,}10\ \text{MeV}, \\ A &= 250 &&\rightarrow && E_{\text{mozg}} = +15{,}06\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Modellünk szerint a bomlás akkor következik be, ha a mozgási energia értéke pozitív. Durva becsléssel ez nagyjából $A > 225$ esetén teljesül. (Pontosabb számítással a mozgási energia $A = 227$-nél vált előjelet.)

5. részfeladat.

a) Mekkora a nikkelmag gerjesztési energiája a transzfer reakció után?

Ezt a részkérdést nemrelativisztikusan és relativisztikusan is meg lehet oldani. Az Olvasóra bízzuk, hogy melyik módszert tartja egyszerűbbnek.

Nemrelativisztikus megoldás: Először is határozzuk meg, hogy mennyi tömeg alakul át energiává a reakcióban, vagyis határozzuk meg a reakció úgynevezett Q értékét. A tömegváltozás:

(15)
$$\begin{aligned}\Delta m &= (\text{tömeg})_{\text{reakció után}} - (\text{tömeg})_{\text{reakció előtt}} = \\ &= (57{,}935\,35 + 12{,}000\,00)\ \text{u} - (53{,}939\,62 + 15{,}994\,91)\ \text{u} = \\ &= 0{,}000\,82\ \text{u} = 1{,}36 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}.\end{aligned}$$

(A fenti képletben u az atomi tömegegységet jelöli, amit régebben a.t.e., vagy az angol megfelelőjére utalva a.m.u. módon is írtak.) A tömeg növekedése azt mutatja, hogy a reakció után a termékek mozgási energiája kisebb kell legyen a kezdetinél. A reakció Q értéke:

(16)
$$\begin{aligned}Q &= (\text{mozgási energia})_{\text{reakció után}} - (\text{mozgási energia})_{\text{reakció előtt}} = \\ &= -\Delta m c^2 = -1{,}224 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = -0{,}764\ \text{MeV}.\end{aligned}$$

Használnunk kell (egy dimenzióban) a lendületmegmaradás, és az energiamegmaradás törvényét:

(17)
$$m\left({}^{16}\text{O}\right)v\left({}^{16}\text{O}\right) = m\left({}^{12}\text{C}\right)v\left({}^{12}\text{C}\right) + m\left({}^{58}\text{Ni}\right)v\left({}^{58}\text{Ni}\right),$$

(18)
$$E_{\text{mozg}}\left({}^{16}\text{O}\right) + Q = E_{\text{mozg}}\left({}^{12}\text{C}\right) + E_{\text{mozg}}\left({}^{58}\text{Ni}\right) + E_{\text{exc}}\left({}^{58}\text{Ni}\right),$$

ahol az utolsó tag a nikkelmag gerjesztési energiája. Mivel a berepülő oxigénmag és a kirepülő szénatommag sebessége megegyezik, a lendületmegmaradási egyenlet így egyszerűsödik:

(19)
$$\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right]v\left({}^{16}\text{O}\right) = m\left({}^{58}\text{Ni}\right)v\left({}^{58}\text{Ni}\right).$$

A szén- és a nikkelmag mozgási energiáját kifejezhetjük a berepülő oxigén megadott mozgási energiája és az ismert magtömegek alapján, és ezt (egyszerű, bár kissé hosszadalmas számolás után) beírhatjuk az energia egyenletbe:

(20)
$$\begin{aligned}E_{\text{exc}}\left({}^{58}\text{Ni}\right) &= Q + E_{\text{mozg}}\left({}^{16}\text{O}\right) - E_{\text{mozg}}\left({}^{12}\text{C}\right) - E_{\text{mozg}}\left({}^{58}\text{Ni}\right) = \\ &= Q + E_{\text{mozg}}\left({}^{16}\text{O}\right)\frac{\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right]\cdot\left[m\left({}^{58}\text{Ni}\right) + m\left({}^{12}\text{C}\right) - m\left({}^{16}\text{O}\right)\right]}{m\left({}^{58}\text{Ni}\right)m\left({}^{16}\text{O}\right)} \approx \\ &\approx 10{,}9\ \text{MeV}.\end{aligned}$$

Érdekes észrevenni, hogy a végeredmény tört kifejezésének számlálójában lévő első szögletes zárójelben lényegében az átadott tömeg (egy alfa-részecske) szerepel, míg a második szögletes zárójelben a vasatommag tömege található.

Relativisztikus megoldás: Relativisztikusan így írhatjuk fel az energia- és az impulzusmegmaradást:

(21)
$$m\left({}^{54}\text{Fe}\right)c^2 + \frac{m\left({}^{16}\text{O}\right)c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} = \frac{m\left({}^{12}\text{C}\right)c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{12}\text{C}\right)}{c^2}}} + \frac{m^*\left({}^{58}\text{Ni}\right)c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{c^2}}},$$

$$\frac{m\left({}^{16}\text{O}\right)v\left({}^{16}\text{O}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} = \frac{m\left({}^{12}\text{C}\right)v\left({}^{12}\text{C}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{12}\text{C}\right)}{c^2}}} + \frac{m^*\left({}^{58}\text{Ni}\right)v\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{c^2}}}.$$

A fenti egyenletekben mindenhol a nyugalmi tömegek szerepelnek. A magasan gerjesztett nikkelmag nyugalmi tömege (m^*) nagyobb, mint az alapállapotú nikkelé, ezt jelzi a csillag.

Ha figyelembe vesszük, hogy az oxigén- és a szénmag sebessége megegyezik, akkor az egyenletek egyszerűsödnek:

(22)
$$m\left({}^{54}\text{Fe}\right) + \frac{m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} = \frac{m^*\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{c^2}}},$$

$$\frac{\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right]v\left({}^{16}\text{O}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} = \frac{m^*\left({}^{58}\text{Ni}\right)v\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{c^2}}}.$$

Ha az utóbbi két egyenletet elosztjuk egymással, akkor a nikkelmag sebességét ki tudjuk fejezni az oxigén sebességével és tömegadatokkal:

(23)
$$v\left({}^{58}\text{Ni}\right) = \frac{\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right]\cdot v\left({}^{16}\text{O}\right)}{\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right] + m\left({}^{54}\text{Fe}\right)\sqrt{1-\dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}}.$$

Az oxigén sebességét pedig a mozgási energia relativisztikus alakjából fejezhetjük ki:

$$E_{\text{mozg}}\left({}^{16}\text{O}\right) = \frac{m\left({}^{16}\text{O}\right)c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} - m\left({}^{16}\text{O}\right)c^2, \tag{24}$$

amiből kissé fáradságos átrendezés után

$$v\left({}^{16}\text{O}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{m\left({}^{16}\text{O}\right)c^2}{E_{\text{mozg}}\left({}^{16}\text{O}\right) + m\left({}^{16}\text{O}\right)c^2}\right)^2} \cdot c \approx 0{,}081\,72 \cdot c \approx 2{,}45 \cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{25}$$

Ezt az értéket (23)-ba helyettesítve megkapjuk a nikkelmag sebességét:

$$v\left({}^{58}\text{Ni}\right) = \frac{\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right] \cdot v\left({}^{16}\text{O}\right)}{\left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right] + m\left({}^{54}\text{Fe}\right)\sqrt{1 - \dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} \approx 1{,}69 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{26}$$

Mindezek után kiszámíthatjuk a gerjesztett állapotú nikkelmag tömegét:

$$m^*\left({}^{58}\text{Ni}\right) = \left[m\left({}^{16}\text{O}\right) - m\left({}^{12}\text{C}\right)\right] \cdot \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2\left({}^{58}\text{Ni}\right)}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2\left({}^{16}\text{O}\right)}{c^2}}} \cdot \frac{v\left({}^{16}\text{O}\right)}{v\left({}^{58}\text{Ni}\right)} \approx 57{,}95\ \text{u}. \tag{27}$$

Ezek után a nikkelmag gerjesztési energiájának kiszámítása már gyerekjáték:

$$E_{\text{exc}} = \left[m^*\left({}^{58}\text{Ni}\right) - m\left({}^{58}\text{Ni}\right)\right]c^2 = 10{,}8636\ \text{MeV}.$$

Három értékes jegyre pontosan visszakaptuk a nemrelativisztikusan számolt végeredményt, ami azt mutatja, hogy jogos volt a nemrelativisztikus számolás.

b) Mekkora a nikkelmag által kibocsátott gamma-foton energiája a kétféle vonatkoztatási rendszerben?

Újra az energia- és az impulzusmegmaradás törvényét kell felírnunk a nikkelmagra. Az egyenletek bal oldalára a gerjesztett állapotot jellemző tagokat írjuk, míg a jobb oldalukra a „legerjesztés” utáni tagokat:

$$\begin{aligned} E_{\text{exc}}\left({}^{58}\text{Ni}\right) &= E_\gamma + E_{\text{visszalökődés}}, \\ 0 &= p_\gamma - p_{\text{visszalökődés}}, \end{aligned} \tag{28}$$

ahol az impulzusokat az atom- és magfizikában megszokott módon p-vel jelöltük. A fotonok energiája és impulzusa között a következő általános összefüggés érvényes:

$$E_\gamma = p_\gamma c. \tag{29}$$

A nikkelmag visszalökődési energiáját klasszikusan számolhatjuk, hiszen az előzőekben láttuk, hogy a problémát jól kezelhetjük nemrelativisztikusan is:

$$E_{\text{visszalökődés}} = \frac{p^2_{\text{visszalökődés}}}{2m\left({}^{58}\text{Ni}\right)} = \frac{p^2_\gamma}{2m\left({}^{58}\text{Ni}\right)} = \frac{E^2_\gamma}{2m\left({}^{58}\text{Ni}\right) \cdot c^2}. \tag{30}$$

Eredményünket helyettesítsük be a (28) energiamegmaradási egyenletébe:

$$E_{\text{exc}}\left({}^{58}\text{Ni}\right) = E_\gamma + E_{\text{visszalökődés}} = E_\gamma + \frac{E^2_\gamma}{2m\left({}^{58}\text{Ni}\right) \cdot c^2}, \tag{31}$$

ami E_γ-ra nézve egy másodfokú egyenlet. Ennek fizikailag értelmes megoldása: $E_\gamma = 10{,}8625$ MeV, vagyis ennyi a gamma-foton energiája abban a vonatkozási rendszerben, amelyben a gerjesztett nikkelmag nyugalomban van. Mindezek után már könnyen meghatározhatjuk a nikkelmag visszalökődési energiáját:

$$E_{\text{visszalökődés}} = E_{\text{exc}}\left({}^{58}\text{Ni}\right) - E_\gamma = 1{,}1\ \text{keV}. \tag{32}$$

Mivel a gammát sugárzó nikkelmag nagy sebességgel mozog a laboratóriumi rendszerben a detektor felé, így az észleléskor a detektor a relativisztikus Doppler-effektus szerint megváltozott frekvenciájúnak „érzi” a vele szembe mozgó gamma-fotont:

$$f_{\text{detektor}} = f_{\gamma,\text{kisugárzott}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{33}$$

A foton energiája és frekvenciája között érvényes a Planck-formula ($E = hf$), vagyis a fotonenergiákra is érvényes a Doppler-képlet:

$$E_{\mathrm{detektor}} = E_{\gamma,\mathrm{kisugárzott}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \tag{34}$$

ahol $\beta = \dfrac{v}{c}$. A nikkelmag sebességét a (26) összefüggés alapján számítottuk ki, aminek a felhasználásával megkapjuk a detektor által észlelt gamma-foton energiáját: $E_{\mathrm{detektor}} = 10{,}924$ MeV.