Megoldás. A föld mágneses terének indukciója a mágneses egyenlítő mentén észak felé irányuló, $B = 30\ \mu\mathrm{T} = 3 \cdot 10^{-5}$ T nagyságú vektor. A töltött részecskékre ható Lorentz-erő $F = evB$, ahol v az adott részecske sebessége, e a töltése (ennek abszolút értéke esetünkben az elemi töltés). Ha a részecske R sugarú körpályán egyenletes mozgást végez, és a mozgását a Newton-féle $F = ma$, vagyis $evB = m\dfrac{v^2}{R}$ mozgásegyenlettel írhatjuk le, a részecske sebességére a

$$v = \frac{eBR}{m} \tag{1}$$

összefüggést kapjuk. Ebből (az adatok behelyettesítése után) még a nagyobb tömegű, tehát kisebb sebességű protonra is $2 \cdot 10^{10}$ m/s nagyságú, tehát a vákuumbeli fénysebességet (c-t) kb. *hatvanszorosan* meghaladó (!) sebesség adódik, ami – jelenlegi ismereteink szerint – lehetetlen.

Tanulság: a Newton-féle mozgásegyenlet helyett itt most a *relativisztikus* dinamika törvényeit kell alkalmaznunk. Eszerint az erő a p impulzus (lendület) időegységre eső változásával egyenlő:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

ahol p a részecske nyugalmi tömegéből (m_0) és a sebességéből a

$$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

összefüggés felhasználásával számítható ki. Ha a részecske körmozgást végez, akkor a p nagyságú impulzusvektor is $\omega = v/R$ szögsebességgel fordul körbe, egy kicsiny Δt idő alatti változása tehát $\Delta p = \omega \Delta t$, ahonnan a mozgásegyenlet:

$$F = p\,\frac{v}{R},$$

azaz

$$p = eBR, \tag{2}$$

tehát

$$v = eBR\,\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_0}. \tag{3}$$

Megjegyzés. Látható, hogy a klasszikus fizika (1) egyenlete és a relativisztikus tárgyalás (3) egyenlete között „mindössze" annyi a különbség, hogy a klasszikus tömeg helyébe a „megnövekedett", ún. relativisztikus tömeget kell írni. Ez a (megnövekedett tömeggel történő, de a nemrelativisztikus formulákat használó) számolási eljárás azonban *nem* minden esetben alkalmazható. A mozgási energia klasszikus $mv^2/2$ képletének szerepét a relativisztikus tárgyalásban *nem* az

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\frac{v^2}{2}$$

formula veszi át, – mint azt sokan – *tévesen* – gondolják, hanem egy egészen más alakú kifejezés.

A (3) összefüggésből kifejezhetjük a részecske sebességét:

$$v = c\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{eBR}\right)^2}} \equiv c\frac{1}{\sqrt{1 + K^2}}. \tag{4}$$

A képletben szereplő dimenziótlan K mennyiség számértéke protonra

$$K^{(\mathrm{proton})} = \frac{m_0^{(\mathrm{proton})} \cdot c}{eBR} \approx \frac{1}{60},$$

elektronra pedig

$$K^{(\mathrm{elektron})} = \frac{m_0^{(\mathrm{elektron})} \cdot c}{eBR} \approx \frac{1}{120\,000}.$$

Mindkét esetben K *sokkal* kisebb 1-nél, tehát (4) nevezőjében elhanyagolható.

a) Ezek szerint az elképzelt, Föld méretű tárológyűrűben mind az elektronok, mind pedig a protonok majdnem pontosan a fény sebességével kellene mozogjanak. A részecskék töltésének előjelét, a mágneses indukcióvektor irányát, valamint a Lorentz-erő jobbkéz-szabályát is figyelembe véve adódik, hogy a protonok (a mágneses) nyugat felé, az elektronok pedig kelet felé mozogva maradhatnak körpályán.

b) A részecskék energiáját a sebesség (4)-ből történő kiszámítása, majd az

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

relativisztikus energiaképlet alkalmazásával kaphatjuk meg. Ez a számolás a protonra még elvégezhető, de az elektronra – a zsebszámológépek szokásos pontossága mellett – nem működik, mert v az elérhető pontosság mellett c-vel egyenlő. Célravezetőbb, ha először a részecske impulzusát számoljuk ki (2) segítségével:

$$p = eBR \approx 3 \cdot 10^{-17}\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}},$$

avagy a részecskefizikában szokásosabb egységet használva:

$$p^{(\text{proton})} = p^{(\text{elektron})} \approx 60\ \text{GeV}/c.$$

Vegyük észre, hogy mindkét típusú részecskére *ugyanakkora impulzus* adódott.

A részecskék energiáját és impulzusát az

$$E = \sqrt{\left(m_0 c^2\right)^2 + (pc)^2}$$

formula kapcsolja össze. Mivel azonban a most vizsgált esetekben mind a protonra, mind pedig az elektronra $pc \gg m_0 c^2$ (vagyis a részecskék *ultrarelativisztikusan* mozognak), fennáll $E \approx pc$, vagyis $E^{(\text{proton})} \approx E^{(\text{elektron})} \approx 60$ GeV.

c) Ilyen energiájú részecskenyalábok a legnagyobb gyorsítókban már előállíthatók, hiszen a Nagy Hadronütköztető (LHC) több TeV energiájú protonokat, a Nagy Elektron-Pozitron Ütköztető (LEP) pedig (2000-ben, a leállítását megelőzően) 106 GeV energiájú elektronokat állított elő.

d) A fény a Föld mágneses egyenlítője mentén (tükrök segítségével)

$$t = \frac{2R\pi}{c}$$

idő alatt tenne meg egy teljes kört. Ezalatt a v sebességű részecskék

$$s = vt = 2R\pi\,\frac{v}{c}$$

utat tesznek meg, a lemaradásuk a fényhez képest

$$\Delta s = 2R\pi\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

A zárójelben álló kicsiny különbséget nem érdemes direkt módon kiszámítani, célszerűbb inkább a (4) összefüggés közelítő alakját használni:

$$\Delta s = 2R\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}\right) \approx 2R\pi\left(1 - \left[1 - \frac{1}{2K^2}\right]\right) = \frac{R\pi}{K^2}.$$

(Alkalmaztuk az $\varepsilon \ll 1$ esetben tetszőleges n-re igaz $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ közelítést.)

A Föld sugarát és a korábban kiszámított K-kat behelyettesítve kapjuk, hogy az útkülönbség a protonok és a fény között kb. 5 km, az elektron és a fény között pedig kb. 1 mm. (A megfelelő időkülönbségek 1 teljes körülfordulásnál 16 μs, illetve 3 ps.)