

Megoldás. Ha a lemez vastagsága d , anyagának sűrűsége pedig ϱ , akkor a nagy körlap tömege

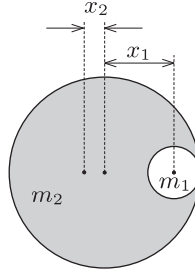
$$m_0 = R^2 \pi \varrho d,$$

a kivágott kis körlap tömege

$$m_1 = r^2 \pi \varrho d,$$

és a maradék darab tömege

$$m_2 = m_0 - m_1 = (R^2 - r^2) \pi \varrho d.$$



1. ábra

A kivágott kis körlap tömegközéppontja a körlemez középpontjától mérve $x_1 = R - r$ távolságra esik. A „lyukas körlap” tömegközéppontja valamekkora x_2 távolságra kerül a körlemez középpontjától, és a feladat szövege szerint $x_2 \leq \frac{R}{100}$ (1. ábra).

A nagy körlap a kis körlapból és a lyukas körlapból áll össze, így a nagy körlap tömegközéppontja (ami nyilván a geometriai középpontjába esik) a két összetevő tömegközéppontjainak koordinátáiból és a tömegeiből számítható:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Innen

$$x_2 = \frac{m_1}{m_2} x_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2} (R - r) = \frac{r^2}{R + r} \leq \frac{R}{100}.$$

Legyen a kérdéses r/R arány a , vagyis $r = aR$. (Nyilván $0 < a < 1$.) Ezzel a jelöléssel a fenti egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2 R^2}{aR + R} \leq \frac{R}{100}, \quad \text{vagyis} \quad 100 a^2 \leq a + 1.$$

Határesetben (amikor $x_2 = R/100$) egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk, amelynek pozitív gyöke:

$$a_0 = \frac{1 + \sqrt{401}}{200} \approx 0,105.$$

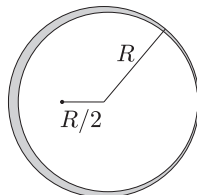
Ha a r/R arány nem nagyobb ennél az értéknél, akkor a lyukas körlemez tömegközéppontja legfeljebb $R/100$ távolságra lehet a tömör körlemez középpontjától.

Megjegyzés. A feladat általánosabban, $x_2 = kR$ tömegközéppont-eltolódásra is megoldható. A sugarak $a = r/R$ aránya ilyenkor

$$a = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k},$$

illetve a fordított összefüggés:

$$k = \frac{a^2}{a + 1}.$$



2. ábra

Ha $k \ll 1$, akkor $k \approx a^2$, vagyis a tömegközéppont (relatív) eltolódása a kivágott rész (relatív) területével egyezik meg. Érdekes a másik határeset is: ha $a \approx 1$ (vagyis ha szinte az egész körlemez eltávolítjuk), akkor a maradék „vonalszerű” alakzat tömegközéppontját $k = 1/2$, vagyis $x_2 = R/2$ jellemzi (2. ábra).