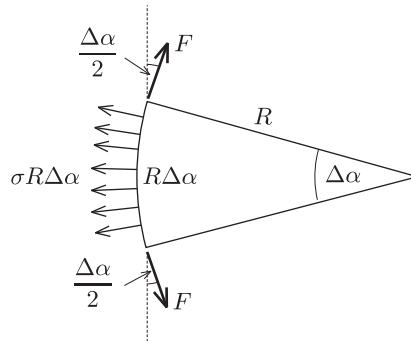


I. megoldás. Tekintsük a jobb oldali hártya kiszúrása után kialakuló egyensúlyi állapotot! A bal oldali hártya a felületi feszültség miatt kicsit összehúzódik, ettől a hajsza! megfeszül és meggömbül. Ha a hajsza! valamely részén a görbületi sugár R , és a hajsza!ban ébredő feszítőerő F , a közöttük fennálló kapcsolat:

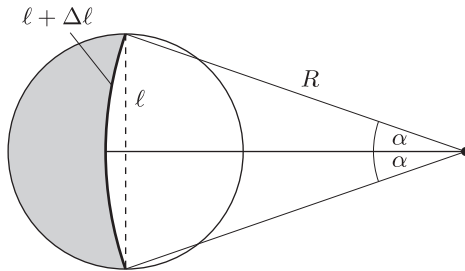
$$(1) \quad F = \sigma R,$$

ahol σ a hártya teljes (annak mindkét oldalát figyelembe vevő) felületi feszültsége. Ezt az összefüggést pl. a hajsza! egy kicsiny, $\Delta\alpha$ középponti szöggel jellemezhető, tehát $R\Delta\alpha$ hosszú darabkájára felírt erőegyensúly egyenletéből kaphatjuk meg (1. ábra):

$$2F \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx 2F \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \sigma R \Delta\alpha.$$



1. ábra



2. ábra

Mivel a hajsza! súlya elhanyagolható, az F feszítőerő a szál minden pontjában *ugyanakkora* kell legyen, így az (1) egyenlet szerint a görbületi sugár is mindenhol ugyanakkora. A szál tehát *körív* alakú lesz.

Legyen e körív középponti szöge 2α , sugara pedig R (2. ábra). Az ábráról leolvasható, hogy a körívhez tartozó húr hossza

$$(2) \quad \ell = 2R \sin \alpha,$$

a megnyúlt hajsza! hossza a körív ívhossza:

$$\ell + \Delta\ell = 2R\alpha,$$

vagyis a szál megnyúlása

$$(3) \quad \Delta\ell = 2R(\alpha - \sin \alpha).$$

Feltételezhetjük, hogy a szál megnyúlása és ezzel együtt az α szög is igen kicsiny, így alkalmazható a feladat szövegében megadott közelítés. Emiatt a szál megnyúlása – a (2) összefüggés $\ell \approx 2R\alpha$ alakját is felhasználva – így írható:

$$(4) \quad \Delta\ell = \frac{\ell}{6} \alpha^2.$$

A hajsza!ban ható érintő irányú erő kifejezhető megnyúlással:

$$F = \frac{EA\Delta\ell}{\ell},$$

ahonnan (1), (2) közelítő alakja és (4) felhasználásával a kérdéses szögre

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\ell\sigma}{EA}},$$

a hajsza! megnyúlására pedig

$$\Delta\ell = \frac{\ell}{6} \left(\frac{3\ell\sigma}{EA} \right)^{\frac{2}{3}}$$

végeredmény adódik.

II. megoldás. A feladat megoldható az energiaminimum elve alapján is. Az egyik hártya átszúrása után kialakuló egyensúlyi állapotban a teljes energiája (ami a felületi feszültségből származó E_f energia és a megfeszülő hajsza E_r rugalmas energiájának összege) minimális kell legyen:

$$E_t = E_f + E_r = \text{minimum.}$$

Az I. megoldás 2. ábrájának jelöléseit használva a felületi energia:

$$E_f = \sigma t,$$

ahol

$$t = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2} - R^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

az épen maradt (az ábrán szürkén jelölt) hártya területe. Mivel (a megadott közelítő formula szerint)

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \approx \frac{1}{2} \left(2\alpha - \frac{1}{6}(2\alpha)^3\right) = \alpha - \frac{2}{3} \alpha^3,$$

továbbá $R \approx \ell/(2\alpha)$, a hártya felületi energiája az α szög függvényében:

$$E_f(\alpha) = E_0 - \frac{\ell^2 \sigma}{6} \alpha.$$

(Itt E_0 egy konstans, tehát az energiaminimum szempontjából érdektelen állandó.)

A megfeszített hajszaiban létrejövő rugalmas feszítőerő

$$F = \frac{EA}{\ell} \Delta \ell,$$

vagyis éppen akkora, mint egy $D = \frac{EA}{\ell}$ rugóállandójú rugóban ébredő erő. A rugalmas energia a rugó megfelelő képletének felhasználásával számolható:

$$E_r = \frac{1}{2} D (\Delta \ell)^2 = \frac{EA}{2\ell} (\Delta \ell)^2,$$

ami az I. megoldás (4) képletének felhasználásával így írható:

$$E_r = \frac{1}{72} EA \ell \alpha^4.$$

A teljes energia:

$$E_t(\alpha) = E_0 - \frac{\ell^2 \sigma}{6} \alpha + \frac{1}{72} EA \ell \alpha^4,$$

melynek minimumát a derivált eltűnése adja meg:

$$E'_t(\alpha) = -\frac{\ell^2 \sigma}{6} + \frac{1}{18} EA \ell \alpha^3 = 0,$$

vagyis az egyensúlyi állapotban

$$\alpha = \alpha_0 = \left(\frac{3\ell\sigma}{EA}\right)^{\frac{1}{3}},$$

a megnyúlás pedig

$$\Delta \ell = \frac{\ell}{6} \left(\frac{3\ell\sigma}{EA}\right)^{\frac{2}{3}},$$

összhangban az I. megoldás végeredményével.

Megjegyzés. Az egyensúlyi állapotban a rendszer energiája nem egyezik meg a jobb oldali hártya átszúrása utáni pillanatnak megfelelő „kezdeti” energiával, vagyis

$$E_t(\alpha_0) \neq E_t(\alpha = 0).$$

Aki az energiamegmaradásra hivatkozva a felületi energia csökkenését a rugalmas energia növekedésével vette egyenlőnek, hibás eredményt kapott. Ténylegesen $|\Delta E_f| = 4 \cdot \Delta E_r$, tehát a rendszer energiája az egyensúly beálltaig *csökken*.