

Megoldás. A korong talajra helyezésekor a talajjal érintkező pont sebessége nagyobb, mint a tömegközéppont sebessége, ezért a korong kipörög („köszörül”). A súrlódási erő miatt a korong középpontja egyre nagyobb sebességgel mozog, a forgás szögsebessége pedig egyre csökken. Egy bizonyos úthossz megtétele után a korong tisztán gördül, ettől kezdve a tapadási erő nem végez munkát.

Jelöljük a korong tömegközéppontjának gyorsulását a -val, pillanatnyi sebességét v -vel, a korong szöggyorsulását β -val, pillanatnyi szögsebességét ω -val, tehetetlenségi nyomatékát Θ -val, a súrlódási erőt F -fel, végül pedig Δt -vel az indítás és a tisztán gördülés között eltelt időt (1. ábra).

Felírhatóak a következő egyenletek:

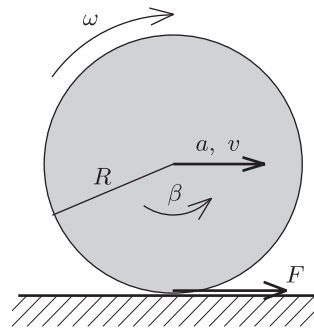
$$(1) \quad ma = F,$$

$$(2) \quad \Theta\beta = FR.$$

A tiszta gördülés feltétele:

$$(3) \quad v = R\omega.$$

Ha x -szel jelöljük azt az utat, amennyit a korong középpontja elmozdul a köszörülés befejeződéséig, akkor



1. ábra

$$(4) \quad x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2.$$

Az (1) és (2) egyenletekből

$$a = \frac{F}{m} = \mu g \approx 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\beta = \frac{FR}{\Theta} = \frac{FR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2g\mu}{R} \approx 80 \frac{1}{\text{s}^2}.$$

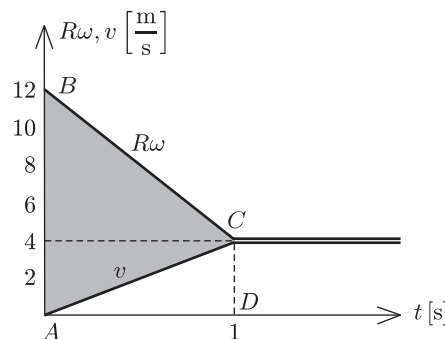
A (3) egyenletből – az egyenletesen változó mozgás sebességének és szögsebességének időfüggését felírva – kapjuk, hogy $a\Delta t = (\omega_0 - \beta\Delta t)R$, ahonnan (az SI-mértékegységek kiírását „lespórolva”)

$$4\Delta t = (120 - 80\Delta t) \cdot 0,1, \quad \Delta t = 1 \text{ s}.$$

Ennyi idő alatt az egyenletesen gyorsuló korong középpontja

$$x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1^2 = 2 \text{ m}$$

utat tesz meg. A súrlódási erő csak ezen a 2 méteres úton végez munkát a korongon, a további 3 méteren *nem*. A tiszta gördülés során a korong tömegközéppontjának sebessége mindvégig 4 m/s, szögsebessége pedig 40 s^{-1} marad. A korong v tömegközépponti sebességének és az $R\omega$ kerületi sebességének időbeli alakulását szemlélteti a 2. ábra.



2. ábra

A korongra ható súrlódási erő munkája két részből áll:

$$W = F \cdot x - F \cdot R\Delta\varphi,$$

ahol $\Delta\varphi$ a korong szögelfordulása Δt idő alatt. (A képletben szereplő előjelek azt fejezik ki, hogy a tömegközéppont sebessége a súrlódási erővel megegyező irányú, a forgásból származó kerületi sebesség pedig azzal ellentétes irányú.) A szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\beta(\Delta t)^2 = 120 - \frac{1}{2} \cdot 80 = 80 \text{ radián},$$

a munka tehát:

$$W = \mu mgx - \mu mg\Delta\varphi R = 0,4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 - 0,4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 0,1 = -120 \text{ J}.$$

Ez a munka a 2. ábrán leolvasható elmozdulásokból közvetlenül is megkapható. A korong középpontjának elmozdulása a tiszta gördülés kezdetéig a $v(t)$ függvény grafikonján a görbe alatti terület. Esetünkben ez az ACD háromszög területe: 2 (méter). Ugyanakkor a kerületi pontok forgás miatti elmozdulása az $R\omega(t)$ grafikon görbe alatti területe, ami esetünkben az $ABCD$ trapéz területe, 6 (méter). A két terület különbsége (az ábrán szürkén jelölt ABC háromszög 6 egységnyi területének (-1) -szerese) a korong súrlódó pontjainak a talajhoz viszonyított (relatív) elmozdulása. Ennek az elmozdulásnak és az $F = 20 \text{ N}$ erőnek a szorzata adja meg a súrlódási erő munkavégzését.

Ugyanezt az eredményt a munkatételből is megkaphatjuk. A végzett munka a korong összes mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 - \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,1^2 \right) \cdot (120 - 80 \cdot 1)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,1^2 \right) \cdot 120^2 = -120 \text{ J}. \end{aligned}$$