

I. megoldás. a) Legyen a félhenger sugara r , és a helyzeti energiát tekintsük a pálya legalsó pontjánánál nullának. A mechanikai energiamegmaradás törvénye szerint az m tömegű test v sebessége a pálya legmélyebb pontján így számolható:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2,$$

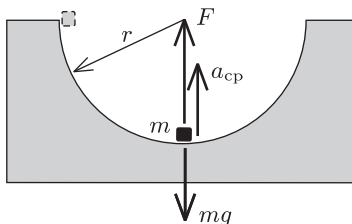
$$v^2 = 2gr.$$

A Newton-egyenlet szerint a kis test és a hasáb között ható erő F erő a kérdéses pontban (1. ábra):

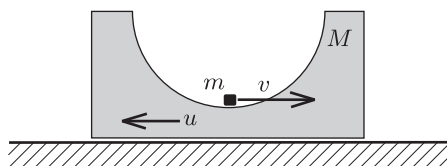
$$F - mg = ma_{\text{cp}}, \quad \text{ahol} \quad a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{r},$$

innen

$$F = mg + m\frac{v^2}{r} = mg + 2mg = 3mg.$$



1. ábra



2. ábra

b) Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a hasáb nem rögzített, hanem súrlódásmentesen elcsúszhat a vízszintes felületen! Jelöljük az m tömegű test sebességét a pálya legalján v -vel, a M tömegű hasáb sebességét pedig u -val (2. ábra)! (A két test sebessége egymással ellentétes irányú.) Mivel a rendszerre nem hat olyan külső erő, aminek vízszintes komponense nullától különböző lenne, a rendszer összlendületének vízszintes komponense mindvégig, így a vizsgálandó pillanatban is nulla kell legyen:

$$Mu - mv = 0,$$

$$Mu = mv.$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazhatjuk az m és M tömegű testekből álló rendszerre:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2,$$

$$2mgr = mv^2 + Mu^2,$$

$$2mgr = mv^2 + muv,$$

$$2gr = uv + v^2.$$

Abban a pillanatban, amikor az m tömegű test a pályája legalsó pontján van, tekinthetjük az M tömegű testet tehetetlenségi (gyorsulásmentes) vonatkoztatási rendszernek.

Megjegyzés. A hasábhöz rögzített koordináta-rendszer *gyorsuló* rendszer, amelyben – eredeti alakjukban – *nem* érvényesek a Newton-törvények. Abban a pillanatban azonban, amikor v és vele együtt u a legnagyobb értékét veszi fel, a koordináta-rendszer gyorsulása éppen nulla, tehát a hasáb vonatkoztatási rendszere inerciarendszernek tekinthető.

Ebből a vonatkoztatási rendszerből nézve a kis test $v_{\text{relatív}} = u + v$ sebességgel r sugarú körpályán mozog, centripetális gyorsulása tehát:

$$a_{\text{cp}} = \frac{(u + v)^2}{r}.$$

Írjuk fel az m tömegű testre a pálya legmélyebb pontján (ahol a hasábra kifejtett erő F erő a megadott $3,5 mg$ nagyságú) a Newton-féle mozgásegyenletet:

$$\begin{aligned} F - mg &= ma_{cp}, \\ 3,5 mg - mg &= m \frac{(u+v)^2}{r}, \\ 2,5 g &= \frac{(u+v)^2}{r}, \\ u+v &= \sqrt{2,5 rg}. \end{aligned}$$

Használjuk fel az energiamegmaradásból kapott eredményt is:

$$\frac{uv + v^2}{u+v} = \frac{2rg}{\sqrt{2,5 rg}},$$

vagyis a kis test sebessége a pálya mélypontján:

$$v = \sqrt{\frac{8}{5} rg}.$$

Ebből a hasáb sebessége is megkapható:

$$u = \sqrt{\frac{5}{2} rg} - v = \sqrt{\frac{5}{2} rg} - \sqrt{\frac{8}{5} rg} = \sqrt{\frac{1}{10} rg},$$

és végül a tömegek aránya is kiszámítható:

$$\frac{m}{M} = \frac{u}{v} = \frac{1}{4}.$$

A hasáb tömege tehát *négyszer* akkora, mint a kis testé.

II. megoldás. Számítsuk ki a két test közötti F nyomóerő nagyságát tetszőleges m/M tömegarányra! Ebből $m \ll M$ határesetben az a) kérdésre kapunk választ, a b) kérdésnél pedig az $F = 3,5 mg$ adatból a tömegarányt határozhatjuk meg.

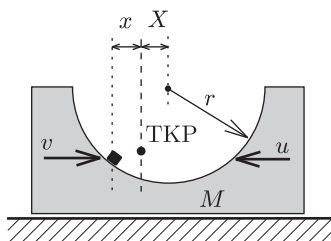
Írjuk le a mozgást az álló, vízszintes felülethez rögzített inerciarendszerből! Vízszintes irányú külső erők hiányában a rendszer tömegközéppontja vízszintesen nem mozdulhat el, fennáll tehát, hogy

$$mx = MX,$$

ahol x a kis test távolsága a tömegközépponton átmenő függőleges egyenestől, X pedig ugyanez a mennyiség a hasábra vonatkoztatva (3. ábra). Innen következik, hogy a $v = -\frac{\Delta x}{\Delta t}$ és $u = -\frac{\Delta X}{\Delta t}$ sebességek aránya is a tömegarányal egyenlő:

$$mv = Mu, \quad \text{azaz} \quad \frac{u}{v} = \frac{m}{M}.$$

(Az előjelválasztás az I. megoldásban használt jelöléseknek felel meg.)



3. ábra

A mechanikai energiamegmaradás törvényéből következik, hogy a kis test pályájának legmélyebb helyzetében

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{M}{m} \cdot \frac{u^2}{v^2}\right) = mgr,$$

ahonnan a sebességarányok ismeretében adódik, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) = mgr,$$

vagyis

$$v = \sqrt{2gr} \cdot \sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

Vajon milyen pályán mozog a választott vonatkoztatási rendszerből nézve? Abban a helyzetben, amikor a kis test a tömegközépponttól vízszintes irányban mérve x távolságra van, a henger középpontja $X = \frac{m}{M}x$ messze lesz a tömegközépponton átmenő függőleges egyenestől. Ha ebben a helyzetben a kis test függőleges irányú elmozdulása y , akkor fenn kell álljon a

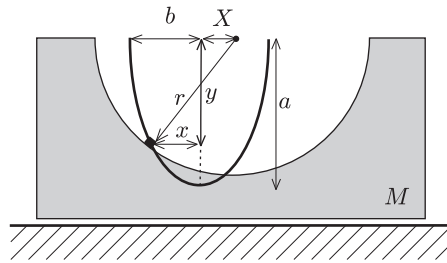
$$(x + X)^2 + y^2 = r^2$$

kényszerfeltétel (hiszen a kis test rajta kell legyen a félhenger palástján). Innen X -et x -szel kifejezve az

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

összefüggés, vagyis egy ellipszis egyenlete adódik (4. ábra), ahol a féltengelyek hossza:

$$a = r \quad \text{és} \quad b = \frac{M}{M+m} r.$$



4. ábra

A pálya legmélyebb pontjában, vagyis az ellipszis csúcspontjában a pálya görbületi sugara:

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 r.$$

Megjegyzés. A görbületi sugár képlete pl. úgy is származtatható, hogy egy tömegpont – amelynek mozgása két, egymásra merőleges irányú harmonikus rezgőmozgásból tevődik össze – gyorsulását kétfeleképpen is kiszámítjuk. Legyen

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = b \sin \omega t,$$

ekkor $t = 0$ pillanatban a test sebessége $v = b\omega$, gyorsulásának nagysága pedig egyrészt $a\omega^2$, másrészt v^2/ϱ alakban is felírható. Innen az ellipszis görbületi sugara (simulókörének sugara) a nagytengely végpontjaiban:

$$\varrho = \frac{v^2}{a\omega^2} = \frac{b^2}{a}.$$

A Newton-féle mozgásegyenlet felhasználásával kiszámíthatjuk a kis test és a hasáb között ható F erőt a pálya legalsó pontjában:

$$F - mg = m \frac{v^2}{\varrho},$$

azaz

$$F = mg + m \cdot 2gr \frac{M}{M+m} \cdot \left(\frac{M+m}{M}\right)^2 \frac{1}{r} = mg \left(3 + 2 \frac{m}{M}\right).$$

Innen már egyszerűen adódik, hogy ha $m \ll M$, akkor $F = 3mg$, és az $F = 3,5mg$ érték $M = 4m$ esetén valósul meg.