

Megoldás. Számítsuk ki, milyen messzire jut el az a vízsugár, amelyik adott H magasra helyezett locsolófejből indul ki, a vízszineshez képest α szögben, v_0 kezdősebességgel. (Az egyik esetben $H = 0$, a másik alkalommal $H = h$.)

A ferde hajítást végző, pontszerűnek tekinthető vízcseppek talajra érésének idejét a függőleges mozgásegyenletből számolhatjuk ki: $\frac{g}{2} t^2 - v_0 \sin \alpha \cdot t = H$, amely másodfokú egyenletnek pozitív gyöke:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g}.$$

Ennyi idő alatt a vízcseppek vízszintes irányban $v_0 \cos \alpha \cdot t$ utat tesznek meg, tehát egy

$$(1) \quad r(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \left[\cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gH}{v_0^2}} \right) \right]$$

sugarú körvonal mentén érnek földet. Ez a körsugár a függőlegesen induló vízcseppek megadott $h = \frac{v_0^2}{2g}$ emelkedési magasságával kifejezve így is írható:

$$r(\alpha) = 2h \left[\cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{H}{h}} \right) \right].$$

A megöntözött terület nagyságát az $r(\alpha)$ függvény maximuma határozza meg. Ha $r(\alpha) \leq R(H)$, akkor az öntözött terület:

$$T(H) = R^2(H)\pi,$$

és a keresett területarány:

$$\frac{T(h)}{T(0)} = \frac{R^2(h)}{R^2(0)}.$$

Az $r(\alpha)$ függvény szélsőértékét az (1)-ben szereplő szögletes zárójeles

$$f(\alpha) = \cos \alpha \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{H}{h}} \right)$$

kifejezés maximuma határozza meg. Ennek megkeresésére többféle módszert alkalmazhatunk.

- Ábrázolhatjuk (adott H mellett) $f(\alpha)$ -t, és a grafikonról leolvashatjuk a szélsőérték helyét és nagyságát.
- Differenciálszámítással, az $f'(\alpha) = 0$ egyenlet megoldásával.
- Egy elemi (lényegében geometriai) módszerrel, melyről a KöMaL 2004. évi decemberi számának 559. oldalán megjelent cikkben olvashatunk.
- A *Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség* alkalmazásával. Eszerint $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ és az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Jelen esetben ez így alkalmazható:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{H}{h}} \leq \\ &\leq \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \frac{H}{h}} = \sqrt{1 + \frac{H}{h}}. \end{aligned}$$

Ennek megfelelően $R(h) = 2h \cdot \sqrt{2}$ és $R(0) = 2h$, tehát a területek aránya:

$$\frac{T(h)}{T(0)} = \frac{R^2(h)}{R^2(0)} = 2.$$

A h magasságra emelt szórófejjel tehát éppen *kétszer nagyobb* területet öntözhetünk, mint a földre helyezettel.

Megjegyzés. Jóllehet a feladat nem kérdezte a legmesszebbre spriccelő vízsugár α_0 indulási szögét, a fentiek alapján ezt is kiszámíthatjuk. Az egyenlőtlenség éles határesetében

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{\frac{h}{h+H}},$$

ez $H = 0$ esetben a közismert $\alpha_0 = 45^\circ$ -ot adja, $H = h$ esetben pedig $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35^\circ$. (Néhány versenyző – tévesen – úgy vélte, hogy a megemelt locsolófejből a vízszintesen kirepülő vízcseppek jutnak legtávolabb.)