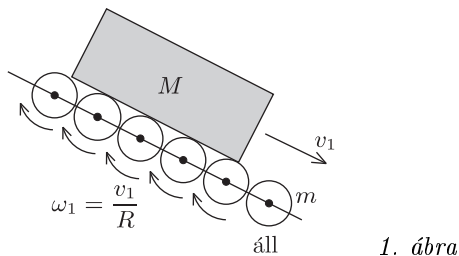


Egy-egy tömör gumihenger tehetetlenségi nyomatéka

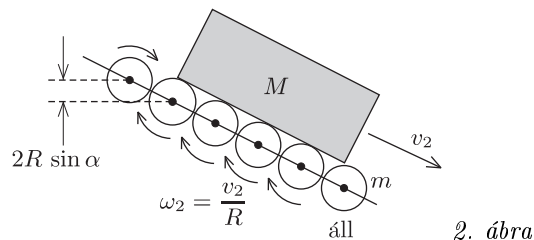
$$\Theta = \frac{1}{2}mR^2.$$

Feltételezzük, hogy a láda egyszerre $N \gg 1$ számú görgővel érintkezik, s amikor a felső fele legurul az egyik görgőről, éppen akkor érkezik az alsó fele egy újabb gumihengerhez. (A végsebesség szempontjából nem lényeges feltevés, hogy a láda hossza legyen egész számú többszöröse a görgők távolságának; ez csupán a számolást egyszerűsíti.)



1. ábra

Tegyük fel, hogy amikor a lefelé mozgó láda hátsó (felső) éle éppen elhagyja az egyik görgő tetejét, akkor a láda sebessége v_1 (1. ábra), amikor pedig majdnem a következő görgőhöz ér, akkor v_2 (2. ábra). Ezen két állapot között a láda tömegközéppontja mélyebbre kerül, gravitációs helyzeti energiája tehát lecsökken, a láda és a vele érintkező N darab görgő (az ábrákon $N = 4$) mozgási energiája pedig megnő.



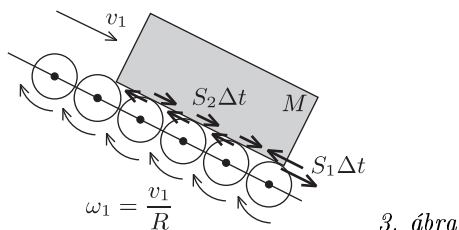
2. ábra

A mozgás ezen szakaszában a láda nem csúszik a görgőkhöz képest, így alkalmazhatjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét:

$$2MgR \sin \alpha = \frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2) + N \cdot \frac{1}{2}\Theta(\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

ahol (a tiszta gördülés miatt) $\omega_{1,2} = v_{1,2}/R$. A fenti összefüggés Θ ismert alakjának felhasználásával így is írható:

$$(1) \quad 4MgR \sin \alpha = \left(M + N \frac{m}{2}\right) (v_2 - v_1)(v_2 + v_1).$$



3. ábra

Amikor a láda rácsúszik a következő, kezdetben még álló gumihengerre, a nagy súrlódás miatt egy rövid ideig nagy erők lépnek fel a láda és a görgők között. Ezen erők hatására a láda sebessége és a vele együtt forgó $N - 1$ darab gumihenger kerületi sebessége lecsökken, az álló gumihenger pedig forogni kezd, kerületi sebessége addig nő, míg el nem éri a láda sebességét. Ha ez a sebesség éppen a korábbi v_1 lesz (3. ábra), akkor a folyamat periodikusan ismétlődve folytatódik, tehát ez lesz a láda „állandósult” (pontosabban állandóan v_1 és v_2 között ingadozó) végsebessége.

A görgők és a láda hirtelen (szög)sebességváltozását a súrlódási erők nagy erőlkései okozzák, ezek mellett a nehézségi erő szerepe elhanyagolható. Ha az erőlkéseket a 3. ábrán látható módon jelöljük, a láda lendületváltozását és a görgők perdületváltozását így írhatjuk le:

$$M(v_2 - v_1) = S_1 \Delta t - (N - 1)S_2 \Delta t,$$

$$RS_1 \Delta t = \Theta \omega_1 = \frac{1}{2}mR^2 \frac{v_1}{R}, \quad RS_2 \Delta t = \Theta(\omega_2 - \omega_1) = \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{v_2}{R} - \frac{v_1}{R} \right).$$

Ezekből – az erőlkések kiküszöbölése után – adódik:

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv_1 = \left(M + \frac{N-1}{2}m \right) (v_2 - v_1).$$

Ha elosztjuk (1)-et (2)-vel, és kihasználjuk, hogy $v_1 \approx v_2 = v_{\max}$, a láda legnagyobb sebességére a következő kifejezés adódik:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4MgR \sin \alpha}{m} \frac{Nm + 2M}{(N-1)m + 2M}},$$

ami $N \gg 1$ esetén így alakul:

$$v_{\max} \approx \sqrt{\frac{4MgR \sin \alpha}{m}}.$$

Megjegyzések. 1. Hibás az a gondolat, miszerint a láda és a gumihengerek között fellépő csúszó súrlódás figyelmen kívül hagyható, és az állandósult sebesség az energiaviszonyokból meghatározható. Ha azt gondoljuk, hogy a láda helyzeti energiájának változása pontosan fedezi a felpörgetett görgők mozgási energiáját, a helyes végsebesség $\sqrt{2}$ -szeresét kapjuk. Ténylegesen ezen energiák aránya (egy-egy gumihengernyi elmozdulásnál):

$$\frac{\Delta E_{\text{mozgási}}}{\Delta E_{\text{helyzeti}}} = \frac{\frac{1}{4}mv^2}{2MgR \sin \alpha} = \frac{1}{2},$$

vagyis a láda helyzeti energiájának csak a fele növeli a gumihengerek mozgási (forgási) energiáját, a másik fele súrlódási hővé alakul. Érdekes, hogy ez az 1/2-es arány független a súrlódási együttható nagyságától.

2. A (2) egyenletből leolvashatjuk, hogy a láda relatív sebességingadozása,

$\frac{v_2 - v_1}{v_1}$ valóban kicsi, ha a $M \gg m$ és az $N \gg 1$ feltételek bármelyike teljesül.