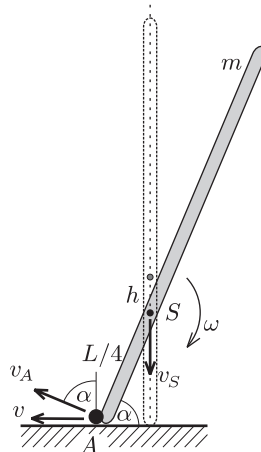


I. megoldás. A pontszerű test addig marad a pálca mellett, amíg az a maximális sebességre gyorsítja fel, ezután elválnak egymástól. Az elválás pillanatáig egyetlen merev testként mozognak, mintha a kis test hozzá lenne ragasztva a pálcához. A rendszer S tömegközéppontja (súlypontja) a pálca aljától $L/4$ távolságban található. Súrlódásmentes mozgásról van szó, vízszintes irányú külső erők nem hatnak, így – a lendületmegmaradás törvényéből adódóan – a tömegközéppont csak függőleges mozgást végezhet, nem lehet vízszintes sebessége.

Számítsuk ki az energiamegmaradás törvényének felhasználásával a pontszerű test v sebességét (vagyis a pálca A pontjához tartozó sebesség vízszintes irányú komponensét) a pálca vízszintessel bezárt α szögének függvényében (1. ábra)!



1. ábra

A test + pálca rendszer mozgási energiáját a súlypont körüli ω szögsebességű forgásnak megfelelő energia és a tömegközéppont v_S sebességű mozgásából adódó energia összegeként, a helyzeti energia változását pedig a tömegközéppont h elmozdulásából számolhatjuk:

$$(1) \quad 2mgh = \frac{1}{2}2mv_S^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

ahol

$$(2) \quad h = \frac{L}{4}(1 - \sin \alpha)$$

a súlypont magasságának csökkenése, J pedig a test és a pálca rendszerének az S súlypontjára vonatkoztatott tehetlenségi nyomatéka. Ez utóbbit a Steiner-tételt alkalmazva kapjuk meg (először a pálca tehetlenségi nyomatékát a pálca súlypontjától a közös súlypontba tolva, majd ehhez hozzáadva a test tehetlenségi nyomatékát a közös súlypontra):

$$(3) \quad J = \left(\frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{16} \right) + m\frac{L^2}{16} = \frac{5}{24}mL^2.$$

Az A pont (S körüli forgásából adódó) kerületi sebessége:

$$(4) \quad v_A = \frac{L}{4}\omega.$$

Ennek függőleges összetevője egyenlő kell legyen v_S -sel, hiszen (az alaplaphoz viszonyítva) az A végpont függőleges sebessége nulla. Eszerint fennáll:

$$(5) \quad v_S = v_A \cos \alpha.$$

Másrészt a pontszerű test sebessége így adható meg:

$$(6) \quad v = v_A \sin \alpha.$$

Az (1)–(6) egyenletekből megkapjuk a pálca szögsebességét:

$$(7) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \sin^2 \alpha}},$$

a kis test sebességét az α szög függvényében:

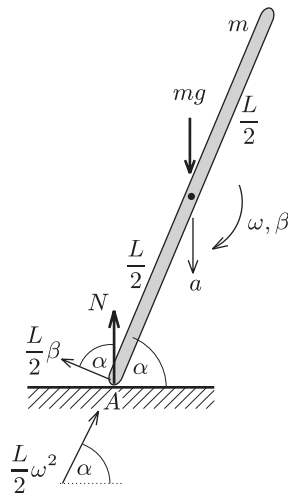
$$v(\alpha) = \sqrt{\frac{gL(1 - \sin \alpha)}{\frac{16}{3} - 2 \sin^2 \alpha}} \sin \alpha.$$

A függvény deriválásával vagy grafikonjának megrajzolásával megállapítható, hogy maximális értékét az $\alpha = 45,4^\circ$ esetén éri el, ekkor a maximális sebesség:

$$v_{\max} \approx 0,82 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

II. megoldás. A feladat differenciálszámítás alkalmazása nélkül is megoldható!

Amikor a kis test sebessége maximális, a gyorsulása nulla, tehát ebben a pillanatban a rúd és a kis test között nem hat erő. Jelöljük a pálcára ható erőket, illetve a pálca szögsebességét és szöggyorsulását a 2. ábrán látható módon!



2. ábra

Az ábrán (vékonyabb vonallal rajzolt nyilakkal) bejelöltük a pálca tömegközéppontjának gyorsulását, valamint az A pontnak a tömegközépponthoz viszonyított centripetális és tangenciális (érintőleges) gyorsulását is.

A következő mozgásegyenleteket írhatjuk fel. A pálca tömegközéppontjának függőleges mozgására:

$$(8) \quad mg - N = ma,$$

a vízszintes (ebben a pillanatban éppen erőmentes) mozgásra:

$$(9) \quad \frac{L}{2} \omega^2 \cos \alpha - \frac{L}{2} \beta \sin \alpha = 0,$$

és a pálca forgására:

$$(10) \quad N \frac{L}{2} \cos \alpha = \frac{1}{12} mL^2 \cdot \beta.$$

Tudjuk még, hogy az A pont nem gyorsulhat függőlegesen, tehát

$$(11) \quad a - \frac{L}{2} \beta \cos \alpha - \frac{L}{2} \omega^2 \sin \alpha = 0.$$

A (9) összefüggésből

$$\beta = \omega^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

(10)-ből

$$N = \frac{1}{6} \frac{mL}{\cos \alpha} \beta = \frac{mL\omega^2}{6 \sin \alpha},$$

(11)-ből pedig

$$a = \frac{L}{2} \omega^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right) = \frac{L}{2 \sin \alpha} \omega^2$$

adódik. Ezeket (8)-ba helyettesítve az

$$\frac{g}{L} = \frac{2\omega^2}{3 \sin \alpha}$$

egyenlet kapjuk, amely az I. megoldásban megkapott, az energiamegmaradást kifejező (7) felhasználásával így is írható:

$$3 \sin^3 \alpha - 24 \sin \alpha + 16 = 0.$$

Ennek az $x = \sin \alpha$ -ra harmadfokú egyenletnek 0 és 1 közé eső gyöke: $x = 0,712$, vagyis $\alpha = 44,6^\circ$, és ennek megfelelően a kis test sebessége (ami ugyanolyan nagy, mint a pálca középpontjának vízszintes irányú sebessége):

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{L\omega}{2} \sin \alpha = 0,82 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés. A tömegközéppont mozgásának ismeretében a Newton-egyenletből – minden α szögre – kiszámíthatjuk és ábrázolhatjuk a pálca és a síklap között ható N nyomóerőt. Ez az erő a mozgás során mindvégig pozitív marad, tehát a pálca *nem* válik el a síklaptól.