

Minden egyes darabka ugyanakkora, $\frac{R}{\sin \alpha}$ távolságra van a m tömegű testtől, ahol az ábrán látható α szögre $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{x}$.

Az egyes gyűrűdarabkák által kifejtett gravitációs vonzóerő nagysága

$$\Delta F = f \frac{m \Delta M \sin^2 \alpha}{R^2}.$$

Ezen erőknek a gyűrű síkjába eső komponensei (szimmetria-okok miatt) kiegyenlítik egymást, az összegük nulla. A tengely irányú komponensek viszont összeadódnak, és az eredőjük:

$$F = \sum \Delta F \cos \alpha = f \frac{m (\sum \Delta M) \sin^2 \alpha \cos \alpha}{R^2} = f \frac{m M \sin^2 \alpha \cos \alpha}{R^2}.$$

Ez az erő ott maximális, ahol a $\sin^2 \alpha \cos \alpha$ kifejezés a legnagyobb értékű. Számítógéppel (vagy akár egy zseb-számológéppel) számolva könnyen megállapíthatjuk, hogy (hegyesszögekre korlátozódva) a maximum $\alpha_m \approx 54,7^\circ$ -nál található. Ennek megfelelően a gravitációs térerősség a gyűrű síkjától

$$x_m = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha_m} \approx 0,71 R$$

távolságban lesz maximális nagyságú.

b) A gyűrűből és a m tömegű testből álló rendszer összen energiája (a gravitációs energia és a mozgási energiák összege) a mozgás során állandó marad. A tömegekre megadott feltétel miatt a (kezdetben állónak tekintett) gyűrű gyakorlatilag mozdulatlan marad, mozgási energiája a másik test mozgási energiája mellett elhanyagolható.

Pontszerű, egymástól r távol levő testek gravitációs helyzeti energiáját az

$$E_g = -f \frac{m_1 m_2}{r}$$

összefüggés alapján számíthatjuk ki. Jelen esetben (mivel a gyűrű minden darabkája ugyanolyan messze van a tengely mentén mozgó kis testtől) a fenti képlet

$$m_1 = m, \quad m_2 = M, \quad r_{\text{kezdeti}} = \frac{R}{\sin \alpha_m}, \quad r_{\text{végső}} = R$$

helyettesítéssel alkalmazható. Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$-f \frac{mM}{R} \sin \alpha_m = \frac{1}{2} m v^2 - f \frac{mM}{R},$$

ahonnan a kis test sebessége a gyűrű középpontjánál

$$v = \sqrt{2(1 - \sin \alpha_m) \cdot f \frac{M}{R}} \approx \sqrt{0,37 \cdot f \frac{M}{R}} \approx 0,61 \sqrt{f \frac{M}{R}}.$$

II. megoldás. a) Az I. megoldás jelöléseit követve a gravitációs gyorsulás a gyűrű síkjától x távolságban:

$$g(x) = f \frac{M}{x^2 + R^2} \cdot \cos \alpha = f M \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}},$$

ami

$$g(x) = f M \cdot \frac{1}{\left[x^{\frac{4}{3}} + R^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right]^{3/2}}$$

alakra is hozható. Ennek a függvénynek ott van maximuma, ahol a szögletes zárójelben álló kifejezésnek minimuma, hiszen a számláló állandó, a $\frac{3}{2}$ -ik hatványfüggvény pedig monoton növekvő. A minimum helyét a derivált eltűnéséből kaphatjuk meg:

$$\left(x^{\frac{4}{3}} + R^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}} \right)' = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} R^2 \cdot x^{-\frac{5}{3}} = 0,$$

ahonnan (az $x \geq 0$ tartományban)

$$x^2 = \frac{R^2}{2}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

(A második derivált a kérdéses helyen pozitív, tehát valóban minimumot találtunk.)

Megjegyzés. A szögletes zárójelben álló kifejezés legkisebb értékét differenciálszámítás nélkül, a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségből is megkaphatjuk:

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} + R^2 x^{-\frac{2}{3}}}{3} = \frac{x^{\frac{4}{3}} + \frac{R^2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{R^2}{2} x^{-\frac{2}{3}}}{3} \geq \sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{R^2}{2} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{R^2}{2} x^{-\frac{2}{3}}},$$

és az egyenlőség (a szélsőérték) éppen akkor teljesül, amikor az átlagolt mennyiségek megegyeznek:

$$x^{\frac{4}{3}} = \frac{R^2}{2} x^{-\frac{2}{3}}, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

(G. P.)

b) A mozgás során – külső erők hiányában – az impulzus megmarad. Írjuk le a mozgást abban a koordináta-rendszerben, amelyben kezdetben a gyűrű is és a kis test is nyugalomban volt. Ha a m tömegű test sebessége valamely pillanatban v , a gyűrűé pedig (ellentétes irányban) V , akkor az impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$mv - MV = 0, \quad \text{azaz} \quad V = \frac{m}{M} v.$$

A két test együttes mozgási energiája:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M \cdot \frac{m^2}{M^2}v^2 = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \approx \frac{1}{2}mv^2.$$

Látható, hogy a $m \ll M$ feltétel miatt a gyűrű mozgási energiája elhanyagolható a kis test mozgási energiája mellett.

Az energiamegmaradás törvénye szerint a kezdeti (nyugalmi) állapotot és a gyűrű középpontján való áthaladás pillanatát összehasonlítva:

$$-f \frac{mM}{\sqrt{\frac{3}{2}}R} = \frac{1}{2}mv^2 - f \frac{mM}{R},$$

ahonnan az áthaladás sebességére

$$v = \sqrt{\frac{2fM}{R} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)} \approx 0,606 \sqrt{f \frac{M}{R}}$$

adódik. (Kihasználtuk, hogy az induláskor a gyűrű minden része

$$\sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}R$$

távolságra volt a m tömegű testtől.)