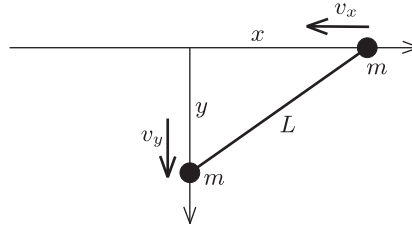


I. megoldás. Az 1. ábrán látható koordináta-rendszerben minden pillanatban teljesül a fonál nyújthatatlanságát kifejező

$$(1) \quad x^2 + y^2 = L^2$$

kényszerfeltétel.



1. ábra

Kicsiny Δt idő elteltével is fennáll ugyanez, tehát

$$(2) \quad (x - v_x \Delta t)^2 + (y + v_y \Delta t)^2 = L^2.$$

(v_x és v_y az egyes testek sebessége az ábrán látható irányítással.) A Δt -ben másodfokú (másodrendűen kicsi) tagokat elhagyva a fenti két egyenletből

$$(3) \quad x v_x = y v_y$$

adódik.

Megjegyzés. Ugyanezt az összefüggést úgy is megkaphatjuk, hogy felírjuk a testek sebességének fonál irányú vetületét, és kihasználjuk, hogy ezek nagysága – a fonál hosszának állandósága miatt – ugyanakkora kell legyen:

$$v_x \cdot \frac{x}{L} = v_y \cdot \frac{y}{L}.$$

Most meghatározzuk a sebességeket az y koordináta függvényében. Szorítkozzunk először a rendszer mozgásának azon részére, amikor $v_x \geq 0$, $v_y \geq 0$ és $x \geq 0$. A munkatételből következik, hogy

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 = m g y.$$

Ebből (1) és (3) felhasználásával

$$v_x^2 + v_x^2 \frac{x^2}{y^2} = 2 g y,$$

vagyis

$$v_x = \frac{y}{L} \sqrt{2 g y} \quad \text{és} \quad v_y = \frac{x}{L} \sqrt{2 g y}$$

adódik. Látható, hogy v_x y monoton növekvő függvénye, így maximuma y legnagyobb, $y^{\max} = L$ értékéhez kötődik. Ekkor $v_x^{\max} = \sqrt{2 g L} \approx 1,41 \sqrt{g L}$.

Fejezzük ki v_y -t (1) felhasználásával csak y , vagy a dimenziótlan $u = \frac{y}{L}$ függvényeként:

$$v_y = \sqrt{\frac{x^2}{L^2} 2 g y} = \sqrt{\frac{(L^2 - y^2) 2 g y}{L^2}} = \sqrt{2 g L} \sqrt{(1 - u^2) u}.$$

Ez a sebesség akkor a legnagyobb, amikor az $(1 - u^2) u$ kifejezés értéke maximális. Differenciálszámítással, vagy a kifejezés numerikus kiszámításával és grafikus ábrázolással megkaphatjuk, hogy a szélsőérték

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58; \quad y = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

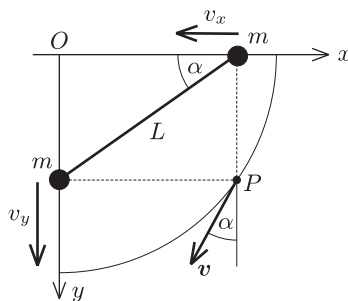
értékhez tartozik, és ekkor

$$v_y^{\max} = \sqrt{\frac{4 g L}{3 \sqrt{3}}} \approx 0,88 \sqrt{g L}.$$

Ekkora sebességekre gyorsulnak fel az egyes testek a nehézségi erő hatására.

A mozgás további szakaszában a vízszintesen mozgó test átlendül az origón, majd fokozatosan lassulva az $x = -L$ helyzetben egy pillanatra megáll; ezután a mozgása folytatódik „visszafelé”. Mivel a testek sebességének nagysága egyértelműen meghatározható a helyzetük függvényében, így a mozgás periodikusan ismétlődő (anharmonikus) rezgőmozgás. A vízszintesen mozgó test periódusideje kétszer nagyobb, mint a függőlegesen mozgó testé.

II. megoldás. Vegyük észre, hogy a 2. ábrán látható P pont a mozgás során mindvégig L távolságra van az O origótól, ezért egy L sugarú köríven mozog.



2. ábra

E pont $\mathbf{v}$ sebességének x irányú komponense (ha az előjelét „balra” tekintjük pozitívnek) a felső test mindenkor v_x sebességével, y irányú komponense pedig az alsó test v_y sebességével egyezik meg. A mechanikai energia megmaradását kifejező

$$mgL \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$$

egyenlet ezért átírható

$$(4) \quad mgL \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2$$

alakba, amely azt fejezi ki, hogy a P pont éppen úgy mozog, ahogy egy L hosszúságú, vízszintesen kitérített fonálinga mozog a nehézségi erő hatására.

A feladatnak arra a kérdésére, hogy hogyan mozognak a testek már most válaszolhatunk: a felső test úgy mozog, ahogy ennek az ingának a földön keletkező árnyéka mozog függőlegesen lefelé irányuló megvilágítás esetén; az alsó test pedig úgy, ahogy az oldalról megvilágított inga árnyéka mozog egy függőleges falon. Ebből következik, hogy a felső test sebessége akkor lesz legnagyobb, amikor éppen áthalad az origón, ekkor ugyanis $\mathbf{v}$ nagysága maximális, iránya pedig vízszintes. A (4) egyenletből leolvasható, hogy ez a sebesség

$$v_x^{\max} = \sqrt{2gL}.$$

Az alsó test sebessége előbb növekszik, majd csökken. A v_y sebesség legnagyobb értékét akkor éri el, amikor az inga gyorsulásának függőleges komponense nullává válik. Ez a gyorsuláskomponens az inga érintő irányú (tangenciális) a_t és fonál irányú (centripetális) a_{cp} gyorsulásának megfelelő vetületeiből számítható ki:

$$(5) \quad a_t \cos \alpha - a_{cp} \sin \alpha = 0.$$

Az inga érintő irányú gyorsulásának nagysága egy α szöggel jellemezhető helyzetben (a mozgásegyenlet szerint)

$$a_t = g \cos \alpha,$$

a centripetális gyorsulása pedig (az energiamegmaradás tételéből számíthatóan)

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} = 2g \sin \alpha.$$

Ezeket (5)-be helyettesítve kapjuk, hogy az alsó test azon $\alpha = \alpha^*$ szöggel jellemzett helyzetben mozog leggyorsabban, amikor $g \cos^2 \alpha^* - 2g \sin^2 \alpha^* = 0$ teljesül, vagyis

$$\alpha^* = \arctg \sqrt{2}/2 = 35,26^\circ.$$

Az alsó test sebessége ebben a helyzetben:

$$v_y^{\max} = v \cos \alpha^* = \sqrt{2gL \sin \alpha^*} \cos \alpha^* \approx 0,88\sqrt{gL}.$$