

Megoldás. A mágneses térben v sebességgel mozgó rúdban $U_{\text{ind}} = B\ell v$ nagyságú feszültség indukálódik, ez csökkenti a külső feszültséget. A rúdban folyó áram az Ohm-törvény szerint:

$$I = \frac{U_0 - B\ell v}{R}.$$

Ekkora áram esetén a mágneses tér

$$F_{\text{Lorentz}} = BI\ell = \frac{U_0 B\ell - B^2 \ell^2 v}{R}$$

erőt fejt ki a rúdra. A mozgásegyenlet (a súrlódást is figyelembe véve):

$$ma = F_{\text{Lorentz}} - \mu mg,$$

vagyis a rúd gyorsulása:

$$(1) \quad a(v) = \left(\frac{U_0 B\ell}{mR} - \mu g \right) - \frac{B^2 \ell^2 v}{mR}.$$

a) Közvetlenül a kapcsoló zárása után a rúd sebessége még nulla, ekkor a gyorsulása (1)-ből:

$$a(v=0) = \frac{U_0 B\ell}{mR} - \mu g \approx 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) A sebesség növekedtével a rúd gyorsulása egyre csökken, és valamekkora határsebességnél a gyorsulás nullához tart. Az $a(v = v_{\text{max}}) = 0$ feltételből az állandósult sebesség kiszámítható:

$$v_{\text{max}} = \frac{U_0}{B\ell} - \frac{\mu mgR}{B^2 \ell^2} \approx 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Mennyi idő alatt nő a rúd sebessége $v_1 = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ról $v_2 = 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ra? Ez a két sebesség alig különbözik egymástól, tehát a mozgás ezen szakaszán a gyorsulás csak nagyon kicsit változik. Számoljunk úgy, mintha a gyorsulás állandó, a

$$v_{\text{átlag}} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

átlagsebességnek megfelelő

$$a_{\text{átlag}} = \left(\frac{U_0 B\ell}{mR} - \mu g \right) - \frac{B^2 \ell^2}{mR} \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \approx 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

lenne. Ekkora (egyenletes) gyorsulás mellett a rúd sebessége

$$\Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a_{\text{átlag}}} \approx 0,034 \text{ s}$$

idő alatt növekszik v_1 -ről v_2 -re, s ekközben a rúd $s = v_{\text{átlag}} \cdot \Delta t \approx 14 \text{ cm}$ utat tesz meg.

Megjegyzés. Differenciálszámítás segítségével megmutatható, hogy az

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = a_0 - \frac{1}{t_0} v(t)$$

alakban is felírható (1) mozgásegyenlet megoldása $v(0) = 0$ kezdfeltétel esetén

$$v(t) = a_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0}).$$

Ebből kiszámítható a kérdéses sebességváltozáshoz szükséges idő, illetve (integrálszámítással) az ekközben megtett út is. A számított (elvben „pontos”) értékek 2 tizedesjegy pontossággal megegyeznek a közelítő számítás eredményével.