

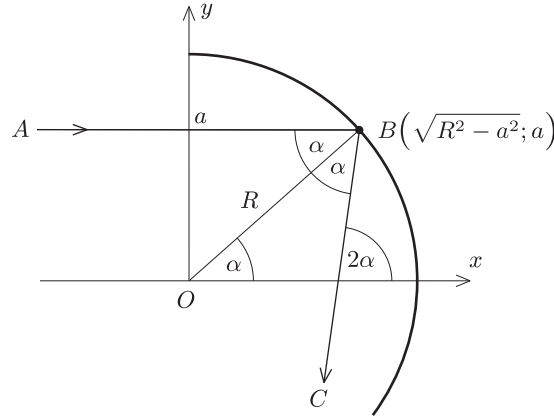
I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot koordináta geometria alkalmazásával! Vegyünk fel egy koordináta-rendszert az 1. ábrán látható módon, s vizsgáljuk az x tengelytől a távolságban haladó AB fénysugár útját! Ez a sugár az R sugarú hengertükröt a $B(\sqrt{R^2 - a^2}; a)$ pontban éri el. A fénysugár a beesési merőlegessel

$$\alpha = \arctg m_{OB}$$

szöget zár be, ahol

$$m_{OB} = \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

az OB egyenes meredeksége.



1. ábra

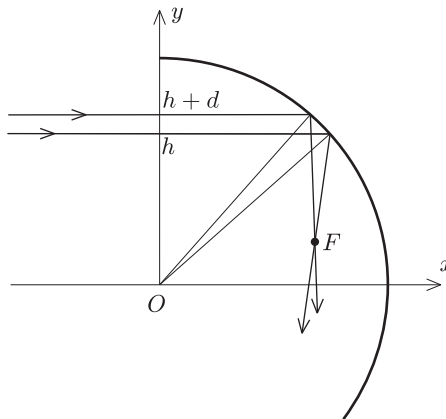
A tükörről visszavert BC sugár az OB egyenessel α , a beeső fénysugárral pedig 2α szöget zár be, a meredeksége tehát

$$m_{BC} = \tg 2\alpha = \frac{2 \tg \alpha}{1 - \tg^2 \alpha} = \frac{2m_{OB}}{1 - m_{OB}^2} = \frac{2a\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2 - 2a^2}.$$

Ezt felhasználva felírhatjuk az ezüstözött felület B pontjáról visszaverődő fénysugár egyenletét:

$$(1) \quad y = \frac{2a\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2 - 2a^2}(x - \sqrt{R^2 - a^2}) + a.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg az x tengelytől $a = h$ és $a = h + d$ távolságban ($d \ll h$) haladó fénysugarak útját a tükröző felületről történő visszaverődésük után. Ha ezen sugarak metszéspontja d -től függetlenül mindig (pontosan, vagy legalább jó közelítéssel) ugyanazon F pontra esik, akkor mondhatjuk, hogy a keskeny fénynyaláb fókuszálódik az F pontban (2. ábra).



2. ábra

A két fénysugár egyenletét (1)-ből kaphatjuk $a = h = 4$, illetve $a = 4 + d$ és $R = 6$ helyettesítéssel. (A távolságokat a továbbiakban cm-ben mérjük és a mértékegységet nem írjuk ki.) Az egyik sugár egyenlete:

$$(2) \quad y = 4\sqrt{5}x - 36,$$

a másiké pedig

$$(3) \quad y = \frac{2(4+d)\sqrt{36-(4+d)^2}}{36-2(4+d)^2} \left(x - \sqrt{36-(4+d)^2} \right) + (4+d).$$

Használjuk ki, hogy $d \ll 1$, és hanyagoljuk el d^2 -t és d magasabb hatványait d mellett! Ebben a közelítésben – az 1-hez közeli számok tetszőleges (akár tört-, vagy negatív kitevős) hatványára vonatkozó $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ képletet is felhasználva – kapjuk, hogy (3) így is írható:

$$(4) \quad y = (1+4d)(4+d)\sqrt{5} \left(1 - \frac{1}{5}d \right) \left[x - \sqrt{20} \left(1 - \frac{1}{5}d \right) \right] + d + 4.$$

(2) és (4) jobb oldalát egyenlővé téve és az egyenletet x -re megoldva (d négyzetét és magasabb hatványait ismét elhanyagolva)

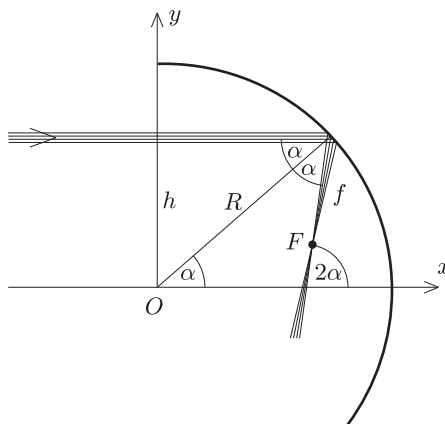
$$x = \frac{17}{9}\sqrt{5} + 0 \cdot d \approx 4,22, \quad \text{illetve} \quad y = \frac{16}{9} \approx 1,78$$

adódik. Ez az eredmény – az adott közelítésben – *független d -től*, tehát a nyaláb valóban fókuszálódik az $F \left(\frac{17\sqrt{5}}{9}; \frac{16}{9} \right)$ pontban. (Hengertükörnél a fókuszálás csak az ábra síkjában történik, a henger szimmetriatengelyével párhuzamos irányban *nem*, emiatt F a térben egy vonalat határoz meg.)

II. megoldás. Belátható, hogy egy R görbületi sugarú tükröző felületre α szög alatt eső fénysugaraknál a leképezési törvény

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R \cos \alpha}$$

alakban teljesül¹. A párhuzamosan („végtelen” távolról) érkező sugarakra $\frac{1}{t} \rightarrow 0$, ilyenkor $k = f = \frac{R \cos \alpha}{2}$.



3. ábra

Jelen esetben (lásd a 3. ábrát) $h = 4$ és $R = 6$ (cm-ben mért) adatok mellett

$$\sin \alpha = \frac{h}{R} = \frac{4}{6}, \quad \alpha = 41,8^\circ, \quad f = 2,23.$$

Az F fókuszpont koordinátái tehát:

$$x_F = R \cos \alpha - f \cos 2\alpha = 4,22 \quad \text{és} \quad y_F = h - f \sin 2\alpha = 1,78.$$

III. megoldás. Tekintsük a 4. ábrán látható *nefroid* („vesegörbe”) nevű n görbét, amelyet egy bizonyos (mondjuk $R/2$) sugarú kör külső felén csúszásmentesen gördülő, fele akkora sugarú (esetünkben $R/4$ sugarú) másik kör valamely P pontja ír le (4. ábra). (Ez a görbe egy olyan *epiciklois*, amelynél az a alapkör sugarának éppen fele a g gördülőkör sugara.) Belátjuk, hogy a párhuzamosan érkező, majd az R sugarú hengertükörről visszaverődő fénysugarak a nefroid érintői.

¹Lásd pl. Kós Géza: Lehet egy közelítéssel kevesebb c. cikkét a KöMaL 2010. évi 3. számában, 177. old.



Egy keskeny fénynyaláb párhuzamos, egymáshoz közeli fénysugarai a nefroidot egymáshoz közeli pontokban érintik, tehát – jó közelítéssel – egy ponton mennek keresztül, *fókuszálódnak*. A fókuszpont a C tükröződési ponttól

$$f = CP = CB \cdot \cos \alpha = \frac{R}{2} \cdot \cos \alpha$$

$$x(\alpha) = \frac{R}{4} (3 \cos \alpha - \cos 3\alpha), \quad y(\alpha) = \frac{R}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha),$$

a feladatban szereplő $\alpha = 41,8^\circ$ esetén $x = 4,22$ cm és $y = 1,17$ cm.