

I. megoldás. Legyen a rudak hossza rendre ℓ_1 , ℓ_2 és ℓ_3 . A rudak páronkénti merőlegessége miatt az alátámasztási pontok távolsága a Pitagorasz-tétel szerint:

$$a = \sqrt{\ell_2^2 + \ell_3^2}, \quad b = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_3^2}, \quad \text{és} \quad c = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}.$$

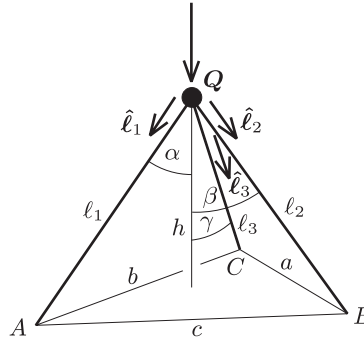
A test $\mathbf{Q}$ súlya rudakon úgy oszlik meg, hogy a rudakban ható (rúdirányú) erők vektori összege éppen $\mathbf{Q}$ -t adja vissza. Az *ábrán* látható jelölésekkel ez az erőfelbontás:

$$\mathbf{Q} = {}_1 \cdot Q \cos \alpha + {}_2 \cdot Q \cos \beta + {}_3 \cdot Q \cos \gamma,$$

ahol ${}_1$, ${}_2$ és ${}_3$ a rudak irányába mutató *egységvektorok*. A rudak által alkotott tetraéder h magasságával kifejezve az erőfelbontás így is írható:

$$\mathbf{Q} = {}_1 \cdot Q \frac{h}{\ell_1} + {}_2 \cdot Q \frac{h}{\ell_2} + {}_3 \cdot Q \frac{h}{\ell_3}.$$

Ebben a képletben az egységvektorok együtthatói éppen a kérdéses rúderők nagyságával egyeznek meg; megadásukhoz a h magasságot kell még kiszámítanunk.



Írjuk fel a tetraéder V térfogatát kétféle módon! Egyrészt az ℓ_1 és ℓ_2 hosszúságú rudak alkotta derékszögű háromszög területe $\frac{1}{2}\ell_1\ell_2$, így az ℓ_3 magasságú tetraéder térfogata:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\ell_1\ell_2 \cdot \ell_3 = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{6}.$$

Másrészt a térfogat kifejezhető az ABC háromszög T területével és a h magassággal is:

$$V = \frac{1}{3}Th.$$

A két alak összevetéséből

$$h = \frac{3V}{T} = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{2T}.$$

Az ABC háromszög T területe az oldalélek hosszának ismeretében a Heron-képletből számítható ki:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol $s = \frac{a+b+c}{2}$. Az oldaléleket a rudak hosszával kifejezve (algebrai átalakítások után) a terület így írható:

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2},$$

a kérdéses magasság pedig

$$h = \frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}}.$$

A rudakban ható erők tehát:

$$F_1 = \frac{h}{\ell_1} Q = \frac{\ell_2\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}} Q = \frac{\frac{1}{\ell_1}}{\sqrt{\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2} + \frac{1}{\ell_3^2}}} Q,$$

$$F_2 = \frac{h}{\ell_2} Q = \frac{\ell_1\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2\ell_2^2 + \ell_2^2\ell_3^2 + \ell_3^2\ell_1^2}} Q = \frac{\frac{1}{\ell_2}}{\sqrt{\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2} + \frac{1}{\ell_3^2}}} Q,$$

és

$$F_3 = \frac{h}{\ell_3} Q = \frac{\ell_1 \ell_2}{\sqrt{\ell_1^2 \ell_2^2 + \ell_2^2 \ell_3^2 + \ell_3^2 \ell_1^2}} Q = \frac{\frac{1}{\ell_3}}{\sqrt{\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2} + \frac{1}{\ell_3^2}}} Q.$$

Egyenlő hosszúságú rudak esetén

$$F_1 = F_2 = F_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} Q.$$

II. megoldás. Egy-egy rúdban ébredő erő iránya rúdirányú kell legyen (ellenkező esetben az elhanyagolható súlyú és csuklós végpontú rúd elfordulna). A három rúd által a Q súlyú testre kifejtett erők eredőjének nagysága Q , iránya pedig a súlyerővel ellentétes kell legyen.

Tekintsük az általános, a , b és c hosszúságú rúd esetét! Jelöljük az a hosszúságú rúd függőlegessel bezárt szögét α -val, a másik két rúd és a függőleges szögét β -val és γ -val! A keresett rúderők nagysága:

$$Q_a = Q \cos \alpha, \quad Q_b = Q \cos \beta, \quad Q_c = Q \cos \gamma.$$

A három (páronként derékszögű) rúdhöz koordináta-rendszert illeszthetünk. Az alátámasztás síkja $x = a$, $y = b$ és $z = c$ pontokban metszi a tengelyeket, a sík tengelymetszetes alakú egyenlete tehát

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Emellett fölírható a sík alaktényezőss egyenlete is: $Ax + By + Cz + D = 0$, ahol

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{1}{b} \quad \text{és} \quad C = \frac{1}{c},$$

továbbá $D = -1$. Az $\mathbf{A} = (A, B, C)$ vektor, és a belőle képezhető

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

egységvektor merőleges az alátámasztás vízszintes síkjára, tehát függőleges irányú.

A függőleges egyenes és a koordinátatengelyek (vagyis a rudak) által bezárt szögek koszinuszai éppen az $\mathbf{n}$ vektor komponensei, vagyis

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

és

$$\cos \gamma = \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

a rudakra ható erők pedig:

$$Q_a = Q \cos \alpha = Q \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

$$Q_b = Q \cos \beta = Q \frac{\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

$$Q_c = Q \cos \gamma = Q \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Abban az esetben, ha $a = b = c$, azaz a rudak egyenlő hosszúak,

$$Q_a = Q_b = Q_c = \frac{Q}{\sqrt{3}}.$$