

I. megoldás. Jelöljük a testet megmozdítani képes legkisebb erő maximális nagyságát F -fel, a vízszintessel bezárt szögét pedig α -val (1. ábra)! Akkor leszünk képesek a test megmozdítására, ha a húzóerő vízszintes vetülete meghaladja a tapadó súrlódási erő nagyságát:

$$F \cos \alpha \geq S = \mu N,$$

ahol N a test által az asztalra kifejtett nyomóerő. Ezt a kényszererőt a függőleges erőkomponensek egyensúlyi feltételéből számolhatjuk ki:

$$N = mg - F \sin \alpha.$$

A fenti két összefüggésből:

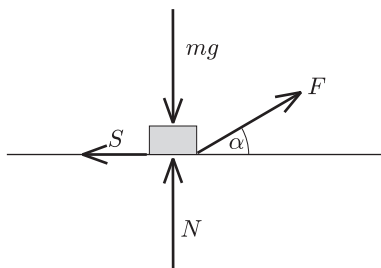
$$F \cos \alpha + F \mu \sin \alpha \geq mg\mu,$$

ami algebrai átalakítások után így is írható:

$$(1) \quad \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \cos \alpha \geq \frac{mg}{F} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Azért célszerű ilyen alakra hozni a vizsgált egyenlőtlenséget, mert a bal oldalon szereplő szögfüggvények együtt hatónak négyzetösszege 1, tehát ezek a mennyiségek kifejezhetők egy alkalmasan választott ε hegyesszög megfelelő szögfüggvényeivel:

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \sin \varepsilon, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \cos \varepsilon.$$



1. ábra

Megjegyzés. A ε szöget *súrlódási határszögnek* nevezzük; ennél meredekebb lejtőn nem maradhat nyugalomban az adott tapadó súrlódással jellemezhető test. A súrlódási határszög és a súrlódási együttható közötti összefüggést $\mu = \tan \varepsilon$ alakban is felírhatjuk.

Ezzel a jelöléssel (1) így írható:

$$\sin \varepsilon \sin \alpha + \cos \varepsilon \cos \alpha \geq \frac{mg}{F} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

ahonnan a koszinusz függvény addíciós képletének felhasználásával adódik:

$$1 \geq \cos(\alpha - \varepsilon) \geq \frac{mg}{F} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Ebből a test megmozdításához szükséges húzóerőt kifejezve:

$$F \geq F_{\min} = mg \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Az egyenlőség határesetek akkor teljesül, ha $\alpha = \varepsilon$, vagyis éppen a súrlódási határszögnek megfelelő irányban húzzuk a testet. Megjegyezzük, hogy legkisebb mozgatóerő a határszög segítségével $F_{\min} = mg \sin \varepsilon$ módon is kifejezhető.

II. megoldás. Az I. megoldás gondolatmenetét és jelöléseit követve eljutunk odáig, hogy a test megmozdításához szükséges erő:

$$F \geq \frac{mg\mu}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

A legkisebb húzóerő (2) jobb oldalának minimumánál valósulhat meg. A számláló konstans, így a tört minimuma a nevező maximumához kötődik. Ez akkor teljesül, ha a derivált nulla: $-\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0$, amiből $\tan \alpha = \mu$. Ezt beírva F kifejezésébe, $F_{\min} = mg \sin \alpha$ adódik, amit $\mu = \tan \alpha$ segítségével kifejezve

$$F_{\min} = mg \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Ekkora és ilyen irányú erő kell a test elhúzásához.

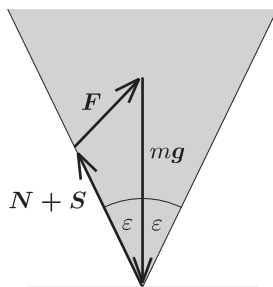
III. megoldás. A feladatot megoldhatjuk szerkesztéssel is. A megcsúszás határhelyzetében a testre ható erők vektori összege még éppen nulla:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + (\mathbf{N} + \mathbf{S}) = 0,$$

ahol $m\mathbf{g}$ a nehézségi erő, $\mathbf{F}$ a keresett húzóerő, $\mathbf{N} + \mathbf{S}$ pedig a talaj által a testre kifejtett nyomóerő és súrlódási erő eredője. Az erőegyensúlyt zárt vektorsokszöggel ábrázolhatjuk (2. ábra). Az ábrán azt is figyelembe vettük, hogy határesetben (a megcsúszás pillanatában) a nyomóerő és a súrlódási erő eredőjének a szürkén jelölt, ε félnyílásszögű kúp palástjára kell esnie, hiszen ekkor teljesül a

$$\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{N}|} = \mu = \operatorname{tg} \varepsilon$$

feltétel.

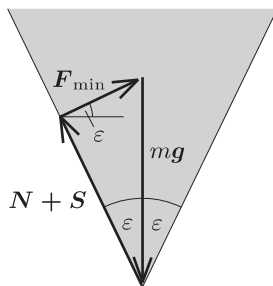


2. ábra

A fenti feltételeknek eleget tevő húzóerők közül az a legkisebb, amelyik merőleges a kúp valamelyik alkotójára (3. ábra). Az ábráról leolvashatjuk, hogy a minimális húzóerő nagysága

$$F_{\min} = mg \sin \varepsilon = mg \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

iránya pedig a vízszintessel éppen a súrlódási határszöggel megegyező szöget zár be.



3. ábra