I. megoldás. Osszuk az (a_n) sorozatot blokkokra: a nulladik blokk álljon a_1-ből, az első legyen a_2, a_3, a másodikhoz tartozzon $a_4, \dots, a_7$. Általában az i-dik blokk az a_{2^i} elemtől tartalmazza a sorozat elemeit az $a_{2^{i+1}-1}$ elemmel bezárólag.

$$\underbrace{\underset{0.}{\sqcup}\quad \underset{1.}{\sqcup\sqcup}\quad \underset{2.}{\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup}\ \ldots\ \underset{(i-1).\text{ blokk}}{\overset{a_{n_{i-1}}}{\sqcup\!\!\sqcup\!\!\sqcup\!\!\sqcup}}}_{2^i-1\text{ elem}}\qquad \underbrace{\underset{i.\text{ blokk}}{\overset{a_{n_i}}{\sqcup\!\!\sqcup\!\!\sqcup\!\!\sqcup\!\!\sqcup\!\!\sqcup}}}_{2^i\text{ elem}}\ \ldots$$

(Ha $2^{i+1}-1 > N$, akkor a blokk értelemszerűen csak a_N-ig tartalmazza a sorozat elemeit.) Tegyük fel, hogy $k+1$ blokkból áll az (a_n) sorozat, vagyis az utolsó blokk a k-adik. Legyen $i < k$-ra a_{n_i} az i-edik blokk legkisebb eleme, és legyen $n_k = N$. A blokkok és az n_i-k megválasztása miatt $n_i < 2^{i+1}$, ezért

$$n_i a_{n_{i-1}} \le 2^{i+1} \cdot a_{n_{i-1}} = 4 \cdot 2^{i-1} a_{n_{i-1}} \le 4 \cdot (a_{2^{i-1}} + \ldots + a_{2^i-1}),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség $a_{n_{i-1}}$ definíciójából és abból következik, hogy az $(i-1)$-edik blokk éppen 2^{i-1} db elemet tartalmaz. Azt kaptuk tehát, hogy az $n_i a_{n_{i-1}}$ szorzat legfeljebb 4-szerese az $(i-1)$-edik blokkban álló elemek összegének, tehát e szorzatok összege is legfeljebb 4-szerese az első k blokk összegének:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}} < 4 \cdot \sum_{i=1}^{2^k-1} a_i \le 4 \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i \le 4 \cdot 500 < 2005. \quad \square$$

Több versenyző is próbálkozott a feladatban szereplő összeg lehetséges értékeinek átlagolásával. Ha ugyanis ez az átlag kisebb lenne 2005-nél, az garantálná, hogy létezik a feltételt teljesítő sorozat. Másképpen fogalmazva: állítsuk elő az $n_0, \dots, n_k$ sorozatot véletlenszerűen úgy, hogy az $2, 3, \dots, N-1$ indexek mindegyikét (egymástól függetlenül) $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választjuk ki (a 0-t és az N-et mindenképpen ki kell választanunk), és vizsgáljuk meg az így előállított $\sum n_i a_{n_{i-1}}$ véletlen összeg várható értékét. Ha a várható érték 2005-nél kisebb, akkor ez biztosítja, hogy az állítás igaz.

Ez az ötlet – ebben a formában – nem vezethet eredményre, mert $\sum n_i a_{n_{i-1}}$ várható értéke tetszőlegesen nagy lehet. Az egyes indexek kiválasztási valószínűségének szerencsésebb megválasztásával azonban a feladat megoldható.

II. megoldás. Készítsük el az $n_0, \dots, n_k$ sorozatot véletlenszerűen úgy, hogy az n indexet tetszőleges $1 \le n \le N$ esetén p_n valószínűséggel választjuk ki, és legyen az egyes indexek kiválasztása egymástól független.

A valószínűségeket a következőképpen válasszuk meg:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & \text{ha } 1 \le n < N; \\ 1, & \text{ha } n = N. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az 1 és az N indexeket biztosan ki kell választanunk, ennek megfelelően $p_1 = p_N = 1$.

Vizsgáljuk meg, hogy valamely $1 \le n < m \le N$ esetén az $m a_n$ kifejezés milyen valószínűséggel szerepel az (1) bal oldalán álló összeg tagjai között. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az n és m indexeket kiválasszuk, a közbülső indexek közül viszont egyet sem. Az $m a_n$ tag előfordulásának valószínűsége tehát

$$p_n(1-p_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1-p_{m-1}) p_m,$$

a teljes összeg várható értéke pedig

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}}\right) = \sum_{1 \le n < m \le N} p_n(1-p_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1-p_{m-1}) p_m \cdot m a_n = \tag{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{m=n+1}^{N} p_n(1-p_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1-p_{m-1}) p_m \cdot m \right) a_n.$$

Ha $m < N$, akkor

$$p_n(1-p_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (1-p_{m-1}) p_m \cdot m =$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \cdot \ldots \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \frac{2}{m+1} \cdot m =$$

$$= \frac{4n}{(m-1)(m+1)} < \frac{4n}{(m-1)m} = \frac{4n}{m-1} - \frac{4n}{m}.$$

Ha pedig $m = N$, akkor

$$p_n(1-p_{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-p_{m-1})p_m\cdot m =$$

$$= \frac{2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+3}\cdot\ldots\cdot\frac{N-2}{N}\cdot 1\cdot N = \frac{2n}{N-1}.$$

Ezeket a becsléseket beírva (2)-be,

$$\sum_{m=n+1}^{N} p_n(1-p_{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-p_{m-1})p_m\cdot m \le$$

$$\le \sum_{m=n+1}^{N-1}\left(\frac{4n}{m-1}-\frac{4n}{m}\right)+\frac{2n}{N-1} = \left(\frac{4n}{n}-\frac{4n}{N-1}\right)+\frac{2n}{N-1} < 4,$$

és

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} n_i a_{n_{i-1}}\right) < \sum_{n=1}^{N-1} 4a_n \le 4\sum_{n=1}^{N} a_n \le 2000.$$

Mivel a várható érték a lehetséges összegeknek a – valószínűségük szerint – súlyozott átlaga, a lehetséges összegek között biztosan létezik 2000-nél kisebb. $\square$