

Megoldás. Tekintsük az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz azon a -t tartalmazó részhalmazait, melyekben bármely két különböző elem különbsége legalább t . Legyen H ezen részhalmazok halmaza. Álljon a K halmaz az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz mindazon részhalmazai közül, amelyek a -t nem tartalmazzák, és amelyekben bármely két elem különbsége legalább t . Azt kell megmutatnunk, hogy $|K| \leq t^2 \cdot |H|$ teljesül.

Ezt úgy bizonyítjuk be, hogy K minden eleméhez hozzárendeljük H egy-egy elemét úgy, hogy H minden egyes elemét K -nak legfeljebb t^2 eleméhez rendeljük hozzá. Más szóval, mutatunk egy $f: K \rightarrow H$ leképezést, amire az teljesül, hogy H minden egyes eleme legfeljebb t^2 elem képeként áll elő. Tetszőleges $X \in K$ részhalmazhoz tekintsük az

$$f(X) := (X \setminus \{a - t + 1, a - t + 2, \dots, a + t - 2, a + t - 1\}) \cup \{a\}$$

halmazt, azaz hagyjuk el X -ből azokat az elemeket, amik a -hoz t -nél közelebb vannak, és vegyük be a -t $f(X)$ -be. Világos, hogy $f(X) \in H$, hisz $a \in f(X)$ teljesül, $f(X) \setminus \{a\}$ bármely eleme legalább t -vel különbözik a -tól, továbbá $f(X)$ bármely két a -tól különböző eleme egyúttal X -nek is eleme, ezért különbségük legalább t .

Megmutatjuk, hogy H bármely Y eleméhez legfeljebb t^2 -féleképpen választhatunk olyan $X \in K$ -t, amelyre $f(X) = Y$. Hogyan képezhetjük egy adott Y -hoz ezeket az X halmazokat? Világos, hogy minden ilyen X -et megkaphatunk úgy, hogy Y -ból elhagyjuk az a elemet, majd további elemeket veszünk be az $[a - t + 1, a - 1]$, illetve az $[a + 1, a + t - 1]$ intervallumból úgy, hogy az így kapott halmazban is teljesüljön, hogy bármely két elem különbsége legalább t . Ez azt jelenti, hogy mind az $[a - t + 1, a - 1]$, mind az $[a + 1, a + t - 1]$ intervallumokból legfeljebb egy-egy elemet választhatunk ki. Mivel mindkét intervallum $t - 1$ elemet tartalmaz, azért mindkét intervallum esetén t -féle választási lehetőségünk van: $(t - 1)$ -féleképp választhatunk ki egy elemet, illetve egyféleképp tehetjük meg, hogy nem választunk egyetlen elemet sem. Összességében tehát legfeljebb $t \cdot t = t^2$ a lehetőségeink száma. Ezért H tetszőleges eleme legfeljebb t^2 K -beli elem képe, így csakugyan igaz, hogy

$$|K| \leq t^2 |H|. \quad \square$$

Megjegyzés. A fenti becslés $t > 2$ esetén javítható, ugyanis amikor $Y \in H$ -hoz konstruálunk olyan $X \in K$ -t, amire $f(X) = Y$ teljesül, akkor általában nem tehetjük meg, hogy tetszőlegesen választjuk az $[a - t + 1, a - 1]$ -beli és az $[a + 1, a + t - 1]$ -beli elemeket. Ügyelnünk kell ugyanis arra is, hogy e két kiválasztott elem különbsége se legyen t -nél kisebb. Ezt figyelembe véve a becslésbeli t^2 tényező $\frac{1}{2} \cdot (t^2 + 3t - 2)$ -re javítható.