

Megoldás. A v sebességgel mozgó m tömegű, e töltésű elektront az eBv Lorentz-erő tartja r sugarú körpályán. Ha a newtoni fizika (nemrelativisztikus) törvényeit alkalmazzuk, az

$$(1) \quad eBv = \frac{mv^2}{r}$$

mozgásegyenletet írhatjuk fel. Mivel az elektron sebessége és a mozgási energiája közötti kapcsolatot az

$$(2) \quad E_m = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{azaz} \quad v = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

összefüggésekből számíthatjuk, (1) és (2)-ből a pályasugárra

$$(3) \quad r = \frac{\sqrt{2E_m m}}{eB}$$

adódik.

Vajon jogos-e a newtoni fizika összefüggéseinek használata a jelen esetben? Számoljuk ki a pályasugarat relativisztikusan is, és vessük össze az eredményt a klasszikus képlettel! Ha a továbbiakban m -mel az elektron nyugalmi tömegét jelöljük, E -vel az összenergiáját, p -vel pedig az impulzusát, akkor a következő relativisztikus képleteket írhatjuk fel:

$$(4) \quad E = mc^2 + E_m,$$

$$(5) \quad E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2},$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

és a körmozgásra vonatkozó mozgásegyenletet:

$$(6) \quad eBv = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{pv}{r}.$$

Ez utóbbiból a pályasugár kifejezhető:

$$r = \frac{p}{eB},$$

majd (5) és (4) segítségével a formula

$$(7) \quad r = \frac{\sqrt{E_m^2 + 2mc^2 E_m}}{ceB}$$

alakra hozható.

Jobban össze tudjuk hasonlítani a nemrelativisztikus és a relativisztikus képletből számolt pályasugarakat, ha az elektron mozgási energiáját az $mc^2 = 510$ keV egységekben mérjük. Legyen

$$\lambda = \frac{E_m}{mc^2},$$

akkor (3) szerint

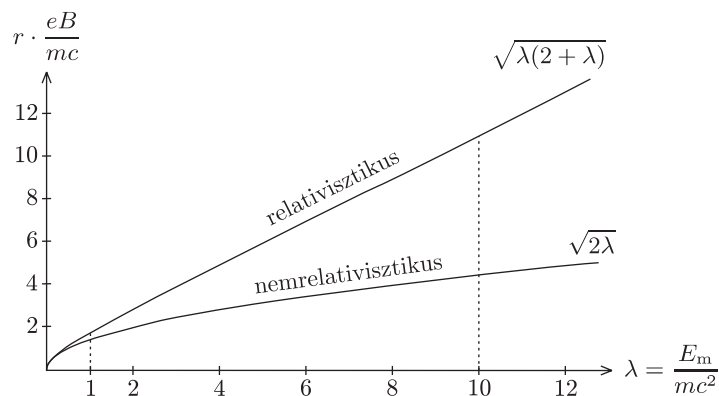
$$r_{\text{nemrel.}} = \frac{mc}{eB} \cdot \sqrt{2\lambda},$$

míg (7) alapján

$$r_{\text{rel.}} = \frac{mc}{eB} \cdot \sqrt{\lambda(2 + \lambda)}.$$

A kétféle formulából számolt pályasugarakat $((mc)/(eB))$ egységekben mérve az *ábra* szemlélteti. A négyzetgyökök előtt álló kifejezés a feladatban szereplő 1 teslá mágneses indukció esetén

$$\frac{mc}{eB} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \text{ m} = 1,7 \text{ mm}.$$



Számítsuk ki most a pályasugarakat a feladatban megadott energiákra!

a) Az első esetben $\lambda = \frac{1}{100} \ll 1$, ilyenkor a nemrelativisztikus és a relativisztikus számolás ugyanarra az eredményre, 0,24 mm-re vezet.

b) Ugyancsak jó a nemrelativisztikus közelítés $\lambda = \frac{10}{510} \approx 0,02$ -nél, a pályasugár 0,34 mm.¹

c) Az 51 MeV-es elektronok mozgási energiája a nyugalmi energia 100-szorosa, tehát $\lambda \gg 1$. Ez az ultrarelativisztikus határeset, amikor az ilyenkor helyes relativisztikus képlet 17 cm-t, a hibás klasszikus formula pedig csak 2,4 cm-t ad.

Az ábrán az a) és b) esetet nem tudtuk feltüntetni, mert a választott lépték mellett az origótól vonalvastagságnyira helyezkednek el. Az azonban jól látszik, hogy a kétféle képlet eredménye itt – gyakorlatilag – megegyezik. Az eltérés $\lambda \approx 1$ -nél válik számottevővé, az ultrarelativisztikus c) határeset pedig már nem fér rá a rajzra, helyette $\lambda = 10$ -et jelöltük be. Ebben az energiatartományban a klasszikus és a relativisztikus számolás alapvetően különböző eredményre vezet.

¹ A Szerkesztőbizottság eredeti szándéka szerint a b) kérdésben 510 keV-os energiát adott volna meg (az angol fordításban ez a számérték szerepelt), ez éppen $\lambda = 1$ -nek felel meg. Ilyenkor a klasszikus és a relativisztikus számolás eredménye már észrevehetően eltér egymástól.