

I. megoldás. A rúd lengésidejét úgy határozzuk meg, hogy keressünk egy vele azonos periódusidejű matematikai ingát. Ha egy l^* hosszúságú fonálinga – azonos kezdeti kitérítés mellett – ugyanúgy leng, mint a feladatban szereplő rúd, akkor a mozgásukra jellemző adatok (szögkitérés, szögsebesség, szöggyorsulás) is minden pillanatban megegyeznek.

Ha a rúd az egyensúlyi helyzetéhez képest α szöget elfordul, akkor tömegközéppontja vízszintes irányban $\frac{l}{2} \sin \alpha$ távolságnyi eltolódik, emiatt a gravitációs erő a csuklóra vonatkoztatva

$$M_1 = -Mg \frac{l}{2} \sin \alpha$$

forgatónyomatékokat fejt ki. Másrészt a csuklótól $x = \frac{3}{4}l$ távolságban levő rugó a (kicsinynek feltételezett) elfordulás miatt $x\alpha \approx x \sin \alpha$ értékkel összenyomódik, és így

$$M_2 = -Dx^2 \sin \alpha = -\frac{9}{16}Dl^2 \sin \alpha$$

forgatónyomatékkal hat a rúdra. A

$$\Theta = \frac{1}{3}Ml^2$$

tehetetlenségi nyomatékú rúd β szöggyorsulását a forgómozgás alapegyenlete határozza meg:

$$M_1 + M_2 = \Theta \beta,$$

vagyis

$$\beta = -\frac{Mg \frac{l}{2} + \frac{9}{16}Dl^2}{\frac{1}{3}Ml^2} \sin \alpha.$$

Másrészt tudjuk, hogy egy l^* hosszúságú matematikai inga mozgásegyenlete

$$\beta = -\frac{g}{l^*} \sin \alpha.$$

A két mozgásegyenlet akkor lesz ugyanolyan alakú, ha

$$l^* = \frac{16 Mg l}{24 Mg + 27 Dl},$$

a rúd lengésideje tehát (kis kitérések esetén):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{16 Ml}{24 Mg + 27 Dl}}.$$

II. megoldás. A fizikai ingából és a hozzá kapcsolt rugóból álló rendszer összenergiája (a mozgási energia, a gravitációs helyzeti energia és a rugó rugalmas energiájának összege) a mozgás során időben állandó:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}Ml^2 \right) \omega^2 + Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2}D \left(\frac{3}{4}l \sin \alpha \right)^2 = \text{állandó},$$

ahol α a rúd szögkitérése, ω pedig a szögsebessége. Képezzük a fenti kifejezés idő szerinti deriváltját (és használjuk ki, hogy α deriváltja ω -val, a szögsebesség deriváltja pedig a β szöggyorsulással egyenlő):

$$0 = \frac{1}{3}Ml^2 \cdot \omega \beta + Mg \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot \omega + D \frac{9l^2}{16} \sin \alpha \cos \alpha \cdot \omega.$$

Innen (a kis kitéréseknél alkalmazható $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$ közelítéssel) a szöggyorsulás kifejezhető a szögkitéréssel:

$$\beta = - \left(\frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{27}{16} \frac{D}{M} \right) \alpha = -\omega_0^2 \alpha,$$

ami a harmonikus rezgőmozgásra jellemző mozgásegyenlet, és a hozzá tartozó periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{16 Ml}{3(9Dl + 8Mg)}}.$$