

I. megoldás. Oldjuk meg a feladatot a Bohr-féle atommodell keretei között! (Ez a modell ugyan nem ad teljes képet a kvantumos jelenségekről, de a hidrogénszerű atomok méretét és ionizációs energiáját helyesen írja le.)

A Bohr-féle kvantumfeltétel szerint az atommag körül keringő részecske impulzusnyomatéka csak $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h -vonás) egész számú többszöröse lehet, ahol h a Planck-állandó. Ebből a feltételből és a Coulomb-törvénnyel felírt Newton-féle mozgásegyenletből levezethető (lásd pl. Holics L.: Fizika 2., 965–967. oldal), hogy egy nehéz magból és egy $-e$ töltésű, m tömegű részecskéből álló alapállapotú atom mérete (sugara)

$$(1) \quad r = \frac{\hbar}{kme^2},$$

ionizációs (kötési) energiája pedig

$$(2) \quad E = -\frac{k^2 e^4 m}{2\hbar^2}.$$

A müonium és a hidrogénatom csak a könnyű részecske tömegében különbözik egymástól. Mivel az atom mérete m -mel fordítottan, a kötési energia pedig egyenesen arányos, ezek a mennyiségek a hidrogénhez képest 207-szer kisebb, illetve nagyobb számértékűek lesznek:

$$r_{\text{müonium}} = \frac{1}{207} r_{\text{hidrogén}} = 2,4 \cdot 10^{-13} \text{ m},$$

$$E_{\text{müonium}} = 207 E_{\text{hidrogén}} = -4,5 \cdot 10^{-16} \text{ J}.$$

II. megoldás. A hidrogénatomban az elektron valamekkora r sugarú (méretű) térrészben helyezkedik el az atommag (proton) körül, potenciális (elektrosztatikus) energiája tehát nagyságrendileg

$$E_{\text{pot.}} = -k \frac{e^2}{r}.$$

Mozgási energiája a Heisenberg-féle $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ határozatlansági reláció miatt nem lehet nulla, hanem legalább

$$E_{\text{mozg.}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2},$$

ahol p az elektron impulzusa. (Ebben a megfontolásban az elektron helyének határozatlanságát – nagyságrendi becslésként – az atom sugarával közelítettük.)

Az atom teljes energiája a potenciális és a mozgási energia összege, vagyis

$$E(r) = -k \frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} = B \left(\frac{1}{r} - \frac{A}{2B} \right)^2 - \frac{A^2}{4B}$$

alakú, ahol A és B az elektron adataival és univerzális konstansokkal kifejezhető állandók.

Az atom alapállapotát az $E(r)$ függvény minimuma adja meg; ez nyilván az

$$r_0 = \frac{2B}{A} \sim \frac{1}{m}$$

sugárnál van, és az energiaminimum értéke

$$E_0 = -\frac{A^2}{4B} \sim m.$$

Ezen arányosságok és a hidrogénatom adatainak ismeretében a müonium méretét és kötési energiáját könnyen kiszámíthatjuk, és az I. megoldásban leírt eredményt kapjuk.

III. megoldás. A feladatot dimenzionális megfontolásokkal is megoldhatjuk. Az atom méretét és kötési energiáját meghatározó összefüggések az elektron tömegétől, a Coulomb-kölcsönhatás erősségét megadó ke^2 kifejezéstől és a kvantumfizika alapmennyiségétől, a h Planck-állandótól függhetnek. Ezekből a dimenziós mennyiségekből csak úgy jöhet ki m , illetve J dimenzió, ha

$$r \sim \frac{h}{kme^2}, \quad \text{illetve} \quad E \sim \frac{k^2 e^4 m}{h^2}.$$

Ezekből az arányosságokból leolvashatjuk, hogy a müonium sugara a hidrogénatom sugarának 207-ed része, kötési energiája pedig (abszolút értékben) 207-szer nagyobb, mint a hidrogéné.