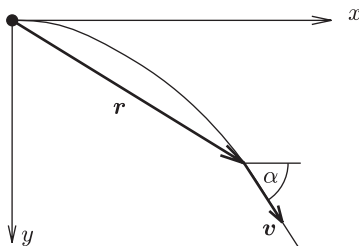


Megoldás. a) Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a test kiindulási helye az origó legyen, az y tengely pedig függőlegesen lefelé álljon.



Ebben a koordináta-rendszerben a test elmozdulásvektora és a sebességvektora:

$$\mathbf{r} = \left(v_0 t; \frac{g}{2} t^2 \right), \quad \text{illetve} \quad \mathbf{v} = (v_0; gt).$$

Ennek a két vektornak a skalárszorzatát kifejezhetjük a vektorok nagyságával és a közbezárt szögük koszinuszával:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{r}| |\mathbf{v}| \cdot \cos \alpha,$$

ami a derékszögű koordinátákkal kifejezve:

$$r_x v_x + r_y v_y = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \cos \alpha,$$

tehát

$$t v_0^2 + \frac{g^2}{2} t^3 = \sqrt{v_0^2 t^2 + \frac{g^2}{4} t^4} \cdot \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \cdot \cos \alpha.$$

Innen algebrai átalakítások után a $w = \left(\frac{g}{v_0} t \right)^2$ mennyiségre egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$(1) \quad w^2 + (4 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) w + 4 = 0,$$

ami $\alpha = 15^\circ$ esetén numerikusan így néz ki:

$$w^2 - 9,928 w + 4 = 0.$$

Ennek gyökei:

$$w_1 = 0,42 \quad \text{és} \quad w_2 = 9,51,$$

a kérdéses időpontok tehát

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \sqrt{w_1} \approx 0,66 \text{ s} \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{v_0}{g} \sqrt{w_2} \approx 3,14 \text{ s}.$$

b) Az (1) egyenletből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$(2) \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - 4 = w + \frac{4}{w}.$$

Alkalmazva a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$w + \frac{4}{w} \geq 2 \sqrt{w \cdot \frac{4}{w}} = 4,$$

ahonnan (2)-ből

$$(3) \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 8, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \alpha \leq 19,5^\circ.$$

Az α szögre vonatkozó egyenlőtlenséget úgy is megkaphatjuk, hogy megvizsgáljuk, mikor van az (1) egyenletnek w -re valós megoldása. A diszkrimináns nemnegatív volta éppen a (3) egyenlőtlenséggel egyenértékű feltétel.

Az α szög legnagyobb értékét differenciálszámítással is meg lehet határozni. Ha az α szöget (vagy annak valamilyen függvényét) kifejezzük a t idővel, és megkeressük ezen függvény deriváltjának zérushelyét, akkor a szög szélsőértékére a (3) egyenlőtlenség határesetét kapjuk.