

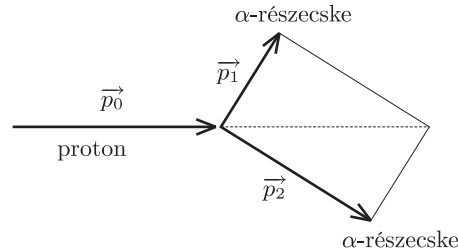
I. megoldás. Jelöljük a proton lendületvektorát \vec{p}_0 -al, a keletkező α -részecskék lendületét pedig \vec{p}_1 és \vec{p}_2 vektorokkal! A folyamat során a lendület megmarad:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Igaz továbbá, hogy ha a keletkező részecskék derékszögben repülnek szét (lásd az *ábrát*), akkor Pitagorasz tétele szerint

$$(1) \quad p_1^2 + p_2^2 = p_0^2.$$

(A fenti képletben a nyílazás nélküli kifejezések a megfelelő vektorok hosszát jelölik.)



A folyamat során az energia is megmaradó mennyiség. Ha a reakcióban részt vevő részecskék sebessége a fénysebességhez képest elhanyagolhatóan kicsiny volna, akkor a newtoni fizika képleteit, nevezetesen a

$$p = mv \quad \text{és} \quad E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

összefüggéseket alkalmazhatnánk. Ezekkel felírva az energiamegmaradás törvényét:

$$(2) \quad \frac{p_0^2}{2m_p} = \frac{p_1^2}{2m_\alpha} + \frac{p_2^2}{2m_\alpha}.$$

Mivel az α -részecskék m_α tömege jó közelítéssel az m_p protontömeg négyszerese, (2) így írható:

$$(3) \quad p_1^2 + p_2^2 = 4p_0^2,$$

ami nyilvánvalóan ellentmond (1)-nek! A részecskék mozgása tehát nem írható le a newtoni fizika törvényeivel, feltétlenül szükséges a *relativisztikus* tárgyalás.

Egy m (nyugalmi) tömegű, v sebességű részecske relativisztikus impulzusát a

$$(4) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

energiáját pedig az

$$(5) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

összefüggések adják meg (c a vákuumbeli fénysebesség). (4)-ből és (5)-ből a sebesség kiküszöbölése után az energia és az impulzus között az

$$(6) \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

relációt kapjuk.

A vizsgált folyamat relativisztikus energia-tétele

$$\sqrt{p_0^2 c^2 + m_p^2 c^4} + m_{\text{Li}} c^2 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_\alpha^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 c^2 + m_\alpha^2 c^4},$$

ami a jó közelítéssel érvényes $m_{\text{Li}} = 7m_p$ és $m_\alpha = 4m_p$ miatt így is felírható:

$$\sqrt{\left(\frac{p_0}{m_p c}\right)^2 + 1} + 7 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{m_p c}\right)^2 + 16} + \sqrt{\left(\frac{p_2}{m_p c}\right)^2 + 16}.$$

Érdeemes bevezetni az

$$x = \frac{p_1}{m_p c}, \quad y = \frac{p_2}{m_p c} \quad \text{és} \quad z = \frac{p_0}{m_p c}$$

dimenziótlan új változókat, melyek között (1) miatt fennáll az

$$(7) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

összefüggés. Az energiamegmaradás egyenlete az új változókkal kifejezve:

$$(8) \quad \sqrt{z^2 + 1} + 7 = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16}.$$

Feladatunk z azon legkisebb értékének meghatározása, amely kielégíti a (8) egyenletet és (7) mellékfeltételt. A (7) összefüggés felhasználásával (8) így is írható:

$$(9) \quad \sqrt{z^2 + 1} + 7 = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{z^2 - x^2 + 16}.$$

Deriváljuk (9) mindkét oldalát x szerint, és használjuk ki, hogy a szélsőérték helyén $\frac{dz}{dx} = 0$:

$$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} - \frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2 + 16}}.$$

Ebből rendezve

$$(10) \quad x = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{z}{\sqrt{2}},$$

vagyis a

$$p_1 = p_2 = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$$

eredmény adódik. A keresett határesetben tehát a két α -részecske egyforma nagyságú impulzussal, a beérkező proton mozgásirányához képest szimmetrikusan, 45° -os szögben repül szét. Visszahelyettesítve a (10)-ben szereplő értékeket (8)-ba és azt $z > 0$ -ra megoldva $z = \sqrt{168}$, vagyis a proton minimális impulzusára a

$$p_{\min} = \sqrt{168} \cdot m_p c$$

eredmény adódik. Ezt (4)-gyel összevetve a proton sebességére a

$$\frac{v}{c} \geq \sqrt{\frac{168}{169}} = 0,997$$

korlátot kapjuk. (Ekkora a sebességgel a legalább 12 GeV energiára felgyorsított protonok rendelkeznek.)

II. megoldás. Jelölje a részecskék tömegét, energiáját, impulzusát rendre m_i , E_i és \mathbf{p}_i , ahol az i index helyére p , α , vagy Li írandó aszerint, hogy protonról, alfa-részecskéről vagy Li-atommagról van szó. Az egyszerűség kedvéért használjunk olyan egységrendszert, amelyben a c fénysebesség egységnyi nagyságú.¹

A részecskék energiája és impulzusa között minden pillanatban fennáll az $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$ egyenlőség (a relativitáselméletben ezt tömeghég-feltételnek nevezik). Az ütközésre érvényes az energiamegmaradás:

$$E_p + E_{\text{Li}} = E_{\alpha,1} + E_{\alpha,2},$$

amely a tömeghég-feltétellel így írható:

$$(1) \quad \sqrt{\mathbf{p}_p^2 + m_p^2} + m_{\text{Li}} = \sqrt{\mathbf{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2} + \sqrt{\mathbf{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2}.$$

Másrészt (mivel a részecskerendszerre külső erő nem hat) teljesül az impulzusmegmaradás is:

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{p}_{\alpha,1} + \mathbf{p}_{\alpha,2},$$

amiből a 90° -ban szétrepülő α -részecskék miatt (Pitagorasz tétele szerint)

$$(2) \quad \mathbf{p}_p^2 = \mathbf{p}_{\alpha,1}^2 + \mathbf{p}_{\alpha,2}^2$$

következik.

Az (1) egyenlet jobb oldala a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség segítségével átírható a következőképpen:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2} + \sqrt{\mathbf{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{\mathbf{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2 + \mathbf{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2}{2}},$$

¹ A $c = 1$ választás áttekinthetőbbé teszi a megoldást, a hiányzó c -ket pedig a számolás végén a dimenzióanalízis módszerének alkalmazásával egyszerűen visszairhatjuk.

ami (2) felhasználásával

$$\sqrt{\mathbf{p}_{\alpha,1}^2 + m_{\alpha}^2} + \sqrt{\mathbf{p}_{\alpha,2}^2 + m_{\alpha}^2} \leq \sqrt{2(\mathbf{p}_p^2 + 2m_{\alpha}^2)}$$

alakra hozható. Ezt az (1) energia-mérlegegyenlettel összevetve egy olyan egyenlőtlenséghez jutunk, amiben már csak \mathbf{p}_p^2 a változó:

$$(3) \quad \sqrt{\mathbf{p}_p^2 + m_p^2} + m_{\text{Li}} \leq \sqrt{2(\mathbf{p}_p^2 + 2m_{\alpha}^2)}.$$

Négyzetre emelés, majd rendezés után (3)-ból a következőhöz jutunk:

$$(4) \quad 0 \leq \mathbf{p}_p^4 - 2\mathbf{p}_p^2(m_p^2 + 3m_{\text{Li}}^2 - 4m_{\alpha}^2) + [(4m_{\alpha}^2 - m_p^2 - m_{\text{Li}}^2)^2 - 4m_p^2 m_{\text{Li}}^2].$$

Ez \mathbf{p}_p^2 -re nézve másodfokú egyenlőtlenség.

Ha a magok kötési energiáját elhanyagoljuk, vagyis az

$$(5) \quad m_{\text{Li}} \approx 7m_p, \quad m_{\alpha} \approx 4m_p$$

közelítéseket használjuk, (4) jobb oldalán a szögletes zárójelben álló konstans tag értéke nullának adódik. Táblázatbeli, pontos tömegértékek felhasználásával persze erre a kifejezésre véges értéket kapunk, de mivel (a feladat szövege szerint) a proton *nagy energiájú* (ezért nagy impulzusú is), így (4) jobb oldalán az első két tag mellett az utolsót nyugodtan elhanyagolhatjuk.

Mivel \mathbf{p}_p^2 értéke biztosan nagyobb, mint nulla, a (4) egyenlőtlenségből a következőt kapjuk:

$$|\mathbf{p}_p| \geq \sqrt{2m_p^2 + 6m_{\text{Li}}^2 - 8m_{\alpha}^2}.$$

Az (5) közelítésekkel és a fénysebesség visszairásával a proton impulzusára a

$$|\mathbf{p}_p| \geq \sqrt{168} m_p c \text{ megszortstkapjuk. Arelativisztikusimpulzus } |\mathbf{p}_p| = \frac{m_p v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ kifejezst felhasználva ez azt jelenti, hogy apr} \\ 0,997 c, \text{ vagyis a fnysebessg } 99,7 \text{ szzalkavolt.}$$

(Vigh Máté)