Megoldás. Ha a $h = 2$ m magasból szabadon eső golyócska x utat tesz meg a lapocskával történő ütközéséëig, akkor az ütközésig eltelt idő

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}\,,$$

a sebessége pedig az ütközéskor $v = \sqrt{2gx}$ nagyságú. A tökéletesen rugalmas ütközés után a golyócska sebességének nagysága változatlan marad, a sebesség iránya pedig vízszintes lesz.

A mozgás második része vízszintes hajítás, amely felbontható egy vízszintes irányú, állandó v sebességű egyenletes mozgásra, illetve egy függőleges irányú, $h - x$ magasságból történő szabadesésre. Ezen mozgás időtartama

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}\,,$$

a vízszintes irányú elmozdulás pedig

$$s(x) = v \cdot t_2 = 2\sqrt{x(h-x)}\,.$$

a) A vízszintes irányú elmozdulás legnagyobb értékét az $s(x)$ függvény maximuma adja meg. Ez nyilván annál az x értéknél lesz, amelynél a gyök alatti kifejezés a legnagyobb. Mivel az $y = x(h-x)$ függvény képe egy „lefelé fordított” parabola, amely $x = 0$-nál és $x = h$-nál a nulla értéket veszi fel, a parabola tengelye (és ezzel együtt a függvény maximuma) $x = \frac{h}{2} = 1$ m-nél van. A golyócska tehát akkor csapódik a legmesszebb a talajba, ha a lapocskát 1 méter magasan helyezzük el.

b) A mozgás teljes ideje

$$T(x) = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{h-x}\right).$$

Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát. Mivel pozitív mennyiségekről van szó, T legnagyobb értéke helyett kereshetjük a négyzetének legnagyobb értékét is:

$$T^2(x) = \frac{2}{g} \cdot \left(h + 2\sqrt{x(h-x)}\right).$$

Mivel g és h adott értékűek, a leghosszabb idejű mozgás megkeresése egyenértékű a négyzetgyök alatti $x(h-x)$ függvény maximumának meghatározásával. Ez – mint az

a) kérdésnél már beláttuk – $x = \frac{h}{2} = 1$ m-nél van, tehát a középmagasságban elhelyezett lapocska nemcsak a legnagyobb vízszintes elmozdulást, de a leghosszabb idejű mozgást is eredményezi.