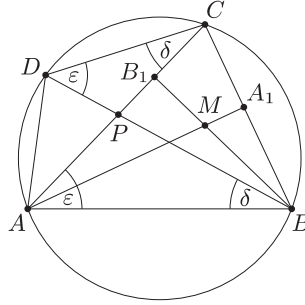


Megoldás. Először belátunk egy segédállítást. Az ABC háromszögben a B -ből induló súlyvonal az AC oldalt P -ben metszi, a háromszög köré írt kört pedig D -ben (1. ábra). Azt állítjuk, hogy ha az

$ABP\angle = \delta = DCP\angle$, és $BAP\angle = \varepsilon = CDP\angle$, tehát az ABP és CDP háromszögek hasonlóak, akkor az $ABCD$ konvex négyszög húrnégyszög.

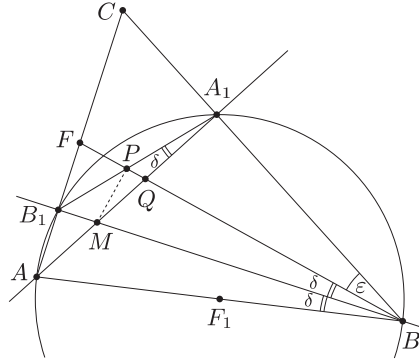


1. ábra

Az ABD háromszög köré írt körben az ABD körív pontjaiból az AD szakasz δ szög alatt látszik. Mivel az $ABD\angle = \delta = ACD\angle$, emiatt a C pont is rajta van ezen a köríven. Tehát az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, és ekkor az is igaz lesz, hogy $BAP\angle = \varepsilon = CDP\angle$, mert ezek a BC húrhoz tartozó kerületi szögek.

Ezután térjünk át a feladat állítására. Rajzoljuk meg az ABC háromszögben az A -ból és B -ből induló magasságvonalakat, talppontjuk A_1 , illetve B_1 (2. ábra). A B -ből induló súlyvonal AC -t F -ben metszi, az AB felezőpontja legyen F_1 , valamint az AA_1 és BF metszéspontja legyen Q . Ha $B_1C = 3AB_1$, akkor – mivel a háromszög hegyesszögű – B_1 rajta van az AC szakaszon, ezért $AB_1 = B_1F$. Legyen

$B_1BF\angle = \delta$, és $A_1BP\angle = \varepsilon$.



2. ábra

Most azt látjuk be, hogy ha $B_1C = 3AB_1$, tehát $AB_1 = B_1F$, akkor $BPM\angle = 90^\circ$. Megmutatjuk, hogy ekkor $ABB_1\angle = \delta$. Mivel a QA_1B szög 90° , az A_1QB szög $90^\circ - \varepsilon$, tehát az $MQB\angle = PQA_1\angle = 90^\circ + \varepsilon$, emiatt a $QMB\angle = 90^\circ - \delta - \varepsilon$. Mivel az $AA_1B\angle = AB_1B\angle = 90^\circ$, a Thalész-tétel miatt A_1 és B_1 rajta van azon a körön, melynek középpontja F_1 , és a sugara $\frac{AB}{2}$. Emiatt az ABA_1B_1 négyszög húrnégyszög, tehát $AA_1B_1\angle = ABB_1\angle = \delta$. Ezért a $QPA_1\angle = 90^\circ - \delta - \varepsilon$. Ekkor az $A_1PB\angle = A_1MB\angle$, és $PA_1M\angle = PBM\angle$, tehát a PA_1Q és MQB háromszögek hasonlóak. Így alkalmazhatjuk a segédállítást, vagyis az MBA_1P négyszög húrnégyszög. Emiatt az $MA_1B\angle = MPB\angle = 90^\circ$, tehát igaz, hogy ha $B_1C = 3AB_1$, akkor $BPM\angle = 90^\circ$.

Végül pedig azt bizonyítjuk be, hogy ha $BPM\angle = 90^\circ$, akkor $AB_1 = B_1F$, és mivel a háromszög hegyesszögű, $B_1C = 3AB_1$. Az előző esethez hasonlóan számolva $A_1QB\angle = 90^\circ - \varepsilon$, az $MQB\angle = 90^\circ + \varepsilon$, és a $PMB\angle = 90^\circ - \delta - \varepsilon$. Mivel az $MPB\angle = MA_1B\angle = 90^\circ$, ezért az MPA_1P négyszög húrnégyszög. Ekkor az $MBP\angle = MA_1P\angle = \delta$, és az

$$A_1MB\angle = A_1PB\angle = 90^\circ - \delta - \varepsilon.$$

Tudjuk, hogy az ABA_1B_1 négyszög húrnégyszög. Tehát az

$$AA_1B_1\angle = ABB_1\angle = \delta,$$

vagyis az $ABB_1\angle = B_1BF\angle$. Ekkor az ABB_1 és B_1BF háromszögekben a megfelelő szögek megegyeznek, a B_1B oldal pedig közös, tehát ez a két háromszög egybevágó, emiatt $AB_1 = B_1F$, ezért

$$B_1C = 3AB_1.$$

Tehát valóban a BPM pontosan akkor derékszög, ha $B_1C = 3AB_1$.