

Megoldás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$. Egyszerűsítsük az első törtet ab -vel, a másodikat bc -vel, a harmadikat ac -vel:

$$\frac{1}{\frac{a}{b} + 3\frac{b}{a}} + \frac{1}{\frac{b}{c} + 3\frac{c}{b}} + \frac{1}{\frac{c}{a} + 3\frac{a}{c}} \leq \frac{3}{4}.$$

Tudjuk, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, így elég bizonyítani, hogy:

$$\frac{1}{2 + 2\frac{b}{a}} + \frac{1}{2 + 2\frac{c}{b}} + \frac{1}{2 + 2\frac{a}{c}} \leq \frac{3}{4}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve ebből:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{3}{2},$$

$$\frac{a}{a+b} - \frac{1}{2} + \frac{b}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+c} - \frac{1}{2} \leq 0,$$

$$\frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{b-c}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(a+c)} \leq 0,$$

$$\frac{(a-b)(b+c)(a+c) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c)}{2(a+b)(b+c)(a+c)} \leq 0,$$

$$(a+c)[(a-b)(b+c) + (b-c)(a+b)] + (c-a)(a+b)(b+c) \leq 0,$$

$$(a+c)(2ab-2bc) + (c-a)(a+b)(b+c) \leq 0,$$

$$(a-c)[2b(a+c) - (a+b)(b+c)] \leq 0,$$

$$(a-c)(ab-ac+bc-b^2) \leq 0,$$

$$(a-c)(c-b)(b-a) \leq 0.$$

Ez pedig $a \leq b \leq c$ esetén igaz, így a bizonyítandó egyenlőtlenség is az.