I. megoldás. Legyen a vizsgált polinom $P(x) \neq 0$, ezt szeretnénk olyan $Q(x) \neq 0$ polinommal szorozni, amire a $P(x)Q(x)$ polinomban minden tag kitevője osztható 3-mal.

Legyen $S_n(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ olyan polinom, amely $P(x)$-nek az összes olyan tagját tartalmazza (előjelével, együtthatójával együtt), amelynek kitevője 3-mal osztva n-et ad maradékul. Tehát $S_1(x) + S_2(x) + S_3(x) = P(x)$.

Ha $S_1(x) = S_2(x) = 0$, akkor kész vagyunk; ha nem, szorozzuk meg $P(x)$-et $\big(S_1(x) - S_2(x)\big)$-szel (ami nyilván nem 0):

$$P(x)\big(S_1(x) - S_2(x)\big) = {S_1}^2(x) - {S_2}^2(x) + S_3(x)S_1(x) - S_3(x)S_2(x).$$

Ekkor ${S_1}^2(x)$-ben és $S_3(x)S_2(x)$-ben minden tag kitevője 2-t ad maradékul 3-mal osztva. (Ha elvégezzük a négyzetreemelést ${S_1}^2(x)$-ben, akkor minden kitevő két olyan számnak az összege lesz, amelyek 3-mal osztva 1-et adnak maradékul; míg $S_3(x)S_2(x)$-ben a szorzás elvégzésekor minden tag kitevője egy 3-mal osztható és egy 3-mal osztva 2 maradékot adó szám összege.) ${S_2}^2(x)$-ben és $S_3(x)S_1(x)$-ben minden tag kitevője 1-et ad maradékul 3-mal osztva. Tehát $\big(P(x)\big(S_1(x) - S_2(x)\big)\big)$-ben egyik tag kitevője sem osztható 3-mal. Legyen T_n $(n = 1, 2)$ olyan polinom, amely $\big(P(x)\big(S_1(x) - S_2(x)\big)\big)$-nek az összes olyan tagját tartalmazza (előjelével, együtthatójával együtt), amelynek kitevője 3-mal osztva n-et ad maradékul. Tehát $T_1(x) + T_2(x) = P(x)\big(S_1(x) - S_2(x)\big)$.

Szorozzuk meg $\big(P(x)\big(S_1(x) - S_2(x)\big)\big)$-et $\big(T_1^2(x) - T_1(x)T_2(x) + T_2^2(x)\big)$-szel (ami nem 0):

$$P(x)\big(S_1(x) - S_2(x)\big)\big(T_1^2(x) - T_1(x)T_2(x) + T_2^2(x)\big) = T_1^3(x) - T_2^3(x).$$

Nem nehéz meggondolni, hogy $T_1^3(x)$ és $T_2^3(x)$ minden tagjának kitevője osztható 3-mal.

Tehát

$$Q(x) = \big(S_1(x) - S_2(x)\big)\big(T_1^2(x) - T_1(x)T_2(x) + T_2^2(x)\big)$$

egy megfelelő, nemnulla polinom. (Ha $P(x)$ minden tagjának kitevője osztható 3-mal, nem kell szoroznunk semmivel.)

II. megoldás. Azt állítjuk, hogy az adott n-edfokú $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ polinomot meg tudjuk szorozni egy legfeljebb $2n$-edfokú $b_{2n}x^{2n} + \ldots + b_1x + b_0$ polinommal úgy, hogy a legfeljebb $3n$-edfokú szorzat polinom megfelelő legyen. $n > 0$-ra bizonyítunk, $n = 0$-ra $b_0 = 1$ triviális megoldás. A cél elérésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a 3-mal nem osztható kitevőjű tagok együtthatója 0 legyen.

Ha $0 \leq k \leq 3n$, és k nem osztható 3-mal, akkor:

$$\sum_{0 \leq i \leq n,\ 0 \leq k-i \leq 2n} a_i b_{k-i} = 0.$$

Ez összesen $2n$ különböző kitevőt jelent, amely ugyanannyi egyenletet ad. Tehát egy, a $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ változókra vonatkozó, $2n + 1$ ismeretlenes, $2n$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk. Mivel az egyenletek száma kevesebb, mint az ismeretlenek száma, ezért az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van. Az utóbbi fog teljesülni, hiszen $b_i = 0$ triviális megoldása az egyenletrendszernek, csak éppen ezt az egy polinomot tiltja a feladat kikötése. De akkor van (végtelen sok) más olyan megoldás is, amiben van nemnulla együttható, így megfelelő polinomot eredményez.

Megjegyzés. A második megoldásból kiderül, hogy a 3-mal való oszthatóságnak a feladat állításának teljesülésében csupán annyi a szerepe, hogy végtelen sok 3-mal osztható természetes szám van. Igaz tehát a következő: ha s természetes számoknak tetszőleges végtelen sorozata, akkor minden nemnulla polinomnak van olyan nemnulla polinomszorosa, amelyben minden tag kitevője s-hez tartozik.