

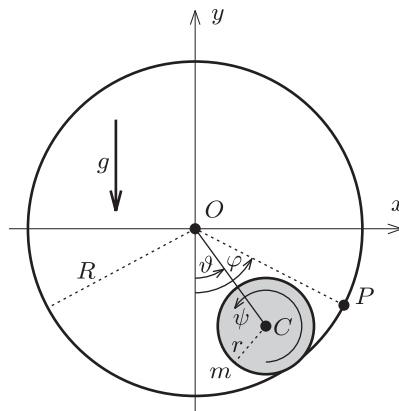
Megoldás. a) A megoldást érdemes az egyenletesen gyorsuló gömb esetével kezdenünk (hiszen ez speciális esetként tartalmazza az egyenletesen forgó és az álló gömb esetét is).

Tegyük fel, hogy a gömb P pontja φ szöggel fordul el a kiindulási, legalsó helyzetből (1. ábra). Eközben a golyó tiszta gördüléssel mozog, és a golyó C középpontja ϑ szöggel fordul el. A golyónak a gömb egyes felületi pontjaihoz képesti összes elfordulása:

$$\frac{R(\varphi - \vartheta)}{r}.$$

A golyó teljes ψ elfordulását úgy kaphatjuk meg, ha a gömb felszínéhez képesti elforduláshoz hozzáadjuk még a golyó C középpontjának elfordulását is:

$$(1) \quad \psi = \frac{R(\varphi - \vartheta)}{r} + \vartheta = \frac{R}{r}\varphi - \frac{R-r}{r}\vartheta.$$



1. ábra

Jelöljük a plexigömb (állandó) szöggyorsulását β -val, a golyó tömegközéppontjának érintő irányú gyorsulás-összetevőjét a -val, a golyó saját középpontja körüli szöggyorsulását pedig $\beta_{\text{golyó}}$ -val. Mivel a szögelfordulások és a szöggyorsulások (egy bizonyos rövid időtartam alatt) arányosak egymással, az (1) összefüggésből leolvasható a szöggyorsulásokra vonatkozó megszorítás, tehát a mozgás kényszerfeltétele is:

$$(2) \quad \beta_{\text{golyó}} = \frac{R}{r}\beta - \frac{R-r}{r} \cdot \frac{a}{R-r}.$$

Megjegyzés: (2)-t átrendezve $R\beta = a + r\beta_{\text{golyó}}$ alakra hozhatjuk, ami azt fejezi ki, hogy a gömb felszínének érintőleges gyorsulása a golyó tömegközépponti és kerületi gyorsulásának összege. Kényszerfeltételek felírásában gyakorlottak ezt a kapcsolatot számolás nélkül, ránézésre is fel tudják írni.

A golyóra ható súrlódási erőt jelöljük S -sel, a golyó tömegközéppontjának szöggyorsulását pedig β_t -vel! Ez utóbbi nyilván kifejezhető a tömegközéppont érintőleges gyorsulásával:

$$(3) \quad \beta_t = \frac{a}{R-r}.$$

A dinamikai egyenletek:

$$(4) \quad S - mg \sin \vartheta = ma = m(R-r)\beta_t,$$

$$(5) \quad Sr = \frac{2}{5}mr^2 \beta_{\text{golyó}}.$$

A (2)–(5) egyenletrendszerből kiküszöbölve az S , a és $\beta_{\text{golyó}}$ mennyiségeket, a golyó tömegközéppontjának szögkitérése és szöggyorsulása között a következő összefüggést kapjuk:

$$(6) \quad \beta_t = -\frac{5g}{7(R-r)} \left(\sin \vartheta - \frac{2R\beta}{5g} \right).$$

Innen leolvashatjuk, hogy általában létezik egy olyan

$$\vartheta_0 = \arcsin \frac{2R\beta}{5g}$$

szög, amelynek megfelelő helyzetben a golyó tömegközéppontja egyensúlyban van.

Megjegyzés: Ha ebből a helyzetből indítjuk a golyót, akkor a tömegközéppontja nyugalomban marad, a tömegközéppont körüli forgásának szögsebessége pedig (a csúszásmentes gördülés feltételének megfelelően)

$$\omega_{\text{golyó}} = \frac{R}{r} \cdot \beta t$$

módon növekszik. Ehhez a megfelelően nagy súrlódáson kívül a szöggyorsulás se lehet akármilyen nagy.

Mivel a feladat szövegében az szerepel, hogy a β szöggyorsulás értéke kicsi, ezért jogos feltennünk, hogy a golyó tömegközéppontjának maximális elmozdulása is kicsi, vagyis indokolt a $\sin \vartheta \approx \vartheta$ közelítés használata. A (6) mozgásegyenlet ebben a közelítésben a

$$\beta_t = -\frac{5g}{7(R-r)} \left(\vartheta - \frac{2R\beta}{5g} \right) = -\Omega^2 \cdot (\vartheta - \vartheta_0)$$

alakú, amelyből látszik, hogy a golyó tömegközéppontja jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgást végez a ϑ_0 szöghelyzet körül, és a rezgésideje:

$$(7) \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

A rezgőmozgás szög-amplitúdója (mivel $\vartheta = 0$ helyzetből indult a golyó) jó közelítéssel ϑ_0 . Meglepő, hogy a rezgésidő akkor is a (7)-nek megfelelő érték, ha a gömb szöggyorsulása nulla, a gömb egyenletesen forog vagy áll, vagyis a) mindhárom kérdésre ugyanaz a válasz.

b) Legyen a plexigömb kezdeti állandó szögsebessége $\omega_{\text{gömb}}$. A tiszta gördülés miatt a gumigolyó ugyanabba az irányba forog, és a golyó szögsebessége:

$$\omega_{\text{golyó}} = \frac{R}{r} \omega_{\text{gömb}}.$$

(Ezt pl. (1)-ből olvashatjuk le, $\vartheta \equiv 0$ helyettesítéssel.)

A plexigömb megállításának pillanatában változó nagyságú $F_s(t)$ súrlódási erő kezd hatni a golyóra, ami valamekkora Δt idő alatt tiszta gördülést eredményez. A súrlódási erő (melynek átlagértékét jelöljük $\bar{F}$ -sal) a golyó tömegközéppontjának valamekkora v_0 sebességet ad, míg a golyó szögsebességét ω_0 értékre csökkenti. A tiszta gördülési feltétel miatt: $v_0 = r\omega_0$.

Írjuk fel a súrlódási erő sebességet, illetve szögsebességet változtató hatását kifejező dinamikai egyenleteket:

$$\bar{F}\Delta t = mv_0 = mr\omega_0,$$

$$r\bar{F}\Delta t = \Theta \cdot \Delta\omega = \frac{2}{5} mr^2 \cdot (\omega_{\text{golyó}} - \omega_0) = \frac{2}{5} mr^2 \cdot \left(\frac{R}{r} \omega_{\text{gömb}} - \omega_0 \right).$$

A fenti egyenletekből $\bar{F}\Delta t$ -t kiküszöbölve a tisztán gördülő golyó adataira

$$(8) \quad \omega_0 = \frac{2R}{7r} \omega_{\text{gömb}} \quad \text{és} \quad v_0 = \frac{2R}{7} \omega_{\text{gömb}}$$

adódik. Mivel ez az állapot (a plexigömb érdes felülete miatt) a gömb megállítása után igen rövid idővel bekövetkezik, feltehetjük, hogy az újra tiszta gördüléssel mozgó golyó lényegében a gömb legalján marad, elmozdulása a megcsúszás közben elhanyagolható.

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre juthatunk akkor is, ha a gömb megállítását követő rövid időre a golyó alatti felületet vízszintes, igen érdes síknak tekintjük. A rövid ideig ható súrlódási „erőlökés” megváltoztatja a golyó mechanikai energiáját és lendületét, de nem változtatja meg a golyónak a gömbbel érintkező pontjára vonatkoztatott *perdületét*:

$$\frac{2}{5} mr^2 \cdot \omega_{\text{golyó}} = \frac{2}{5} mr^2 \cdot \omega_0 + mv_0 \cdot r.$$

Ez a feltétel $v_0 = r\omega_0$ és $r\omega_{\text{golyó}} = R\omega_{\text{gömb}}$ miatt (8)-cal egyenértékű.

A golyó további (tisztán gördülő) mozgása során felhasználhatjuk az energiamegmaradás törvényét, és felírjuk a tömegközéppontra vonatkozó mozgásegyenletet a golyó pályájának bármelyik, például a legfelső pontjára is:

$$mg - K = m \frac{v_1^2}{R-r},$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_0^2 = mg \cdot 2(R-r) + \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_1^2,$$

ahol v_1 és ω_1 a golyó sebessége, illetve szögsebessége a pálya legfelső pontjában ($v_1 = r\omega_1$), K pedig a golyó és a plexigömb között fellépő nyomóerőt jelöli ebben a helyzetben.

A megfelelő mennyiségek behelyettesítése után a kényszererőt így fejezhetjük ki a plexigömb kezdeti szögsebességével:

$$K = \frac{4}{49} \frac{mR^2\omega_{\text{gömb}}^2}{R-r} - \frac{27}{7} mg.$$

A gumigolyó akkor juthat fel a legfelső pontba, ha a K kényszererő még a pálya legfelső pontjában sem negatív ($K \geq 0$), ami a következő feltételt adja a gömb kezdeti szögsebességére:

$$\omega_{\text{gömb}} \geq \frac{3}{2R} \sqrt{21(R-r)g}.$$