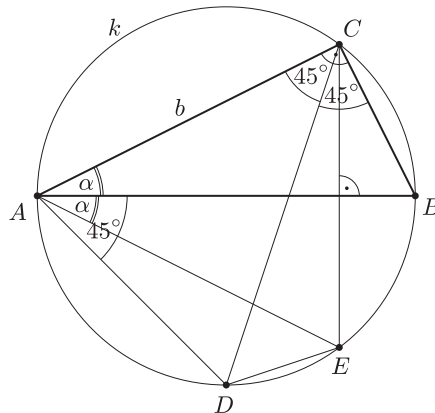


**I. megoldás.** Legyen a  $b$  befogó  $C$ -től különböző végpontja  $A$ , a háromszög harmadik csúcsa pedig  $B$ . Ekkor Thalész tételének megfordításából következik, hogy  $AB$  a körülírt  $k$  kör átmérője. Egy kör középpontjából a kör tetszőleges húrjára állított merőleges felezi a húr, ezért  $CE$  és  $AB$  merőlegességéből következik, hogy  $C$  és  $E$  az  $AB$ -re szimmetrikusan helyezkedik el, tehát  $\angle CAB = \angle EAB = \alpha$ . Mivel  $b$  a nem kisebb befogó, azért  $\alpha \leq 45^\circ$ . A  $CD$  szakasz szögfelező, így  $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$ , a kerületi szögek tétele szerint pedig  $\angle BAD = \angle BCD = 45^\circ$ . Tehát

$$\angle DAC = \angle BAD + \angle BAC = 45^\circ + \alpha,$$

továbbá

$$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 45^\circ - \alpha.$$



Az  $AB$  átmérőjű  $k$  kör nemcsak az  $ABC$ , hanem az  $ADC$  és az  $AED$  háromszögeknek is köréírt köre, ezért az általánosított szinusztétel szerint

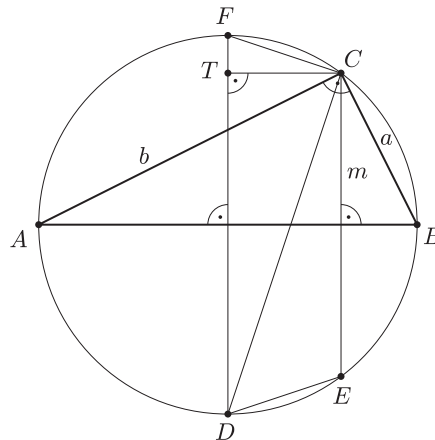
$$CD = AB \sin(45^\circ + \alpha) \quad \text{és} \quad DE = AB \sin(45^\circ - \alpha).$$

Tehát

$$\begin{aligned} CD + DE &= AB(\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)) = \\ &= 2AB \sin 45^\circ \cos \alpha = AB\sqrt{2} \cos \alpha = b\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

**II. megoldás.** Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá  $BC = a$ , a háromszög  $C$ -hez tartozó magasságának hossza pedig  $m$ . Ekkor Pithagorasz tétele szerint  $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$  és  $m = ab/\sqrt{a^2 + b^2}$ , hiszen az  $ABC$  háromszög területének kétszeresével egyezik meg az  $ab$  és az  $m\sqrt{a^2 + b^2}$  szorzat is.



Az I. megoldásban láttuk, hogy  $E$ -nek az  $AB$ -re vonatkozó tükörképe  $C$ . Mivel  $CD$  szögfelező,  $D$  felezi az  $AB$  ívet. Tehát ha  $D$ -nek az  $AB$ -re vonatkozó tükörképe  $F$ , akkor  $DF$  is átmérője  $k$ -nak, a  $DFCE$  négyszög pedig (esetleg elfajuló) szimmetrikus trapéz. Ezért  $DE = CF$ . Ha a  $C$ -ből  $DF$ -re bocsájtott merőleges talppontja  $T$ , akkor

$$TF = (DF - EC)/2$$

és  $DT = DF - TF = (DF + EC)/2$ .

Thalész tétele szerint  $DCF \sphericalangle = 90^\circ$ . A  $CDF$  derékszögű háromszög átfogója  $DF = AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ , a befogótétel szerint tehát

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{DF \cdot DT} = \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + ab} = \sqrt{\frac{(a + b)^2}{2}} = \frac{a + b}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

és (felhasználva, hogy  $b \geq a$ , azaz  $b - a \geq 0$ )

$$\begin{aligned} CF &= \sqrt{DF \cdot TF} = \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - ab} = \sqrt{\frac{(b - a)^2}{2}} = \frac{b - a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$CD + DE = CD + CF = \frac{a + b}{\sqrt{2}} + \frac{b - a}{\sqrt{2}} = b\sqrt{2},$$

ami épp a bizonyítandó állítás.