Megoldás. Felhasználjuk, hogy

$$\nu(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]; \tag{1}$$

ez speciális esete az úgynevezett *Legendre-formulának.* (A Legendre-formuláról bővebben lásd az 1. megjegyzést.)

Ha az n szám kettes számrendszerbeli alakja

$$n=\overline{d_\ell d_{\ell-1}\ldots d_1 d_0}=\sum_{i=0}^{\ell} d_i\cdot 2^i,$$

ahol a $d_0,\ldots,d_\ell$ számjegyek mindegyike 0 vagy 1, akkor (1)-ben csak $k\le\ell$ esetén kapunk 0-tól különböző tagokat, és

$$\nu(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{\ell}\left[\frac{\overline{d_\ell d_{\ell-1}\ldots d_1 d_0}}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{\ell}\overline{d_\ell d_{\ell-1}\ldots d_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\left(\sum_{i=k}^{\ell} d_i\cdot 2^{i-k}\right)=\sum_{i=1}^{\ell} d_i\left(\sum_{k=1}^{i}2^{i-k}\right)=\sum_{i=1}^{\ell} d_i\cdot(2^i-1).$$

Ennek egyszerű következménye, hogy *pontosan azok a pozitív egészek állnak elő $\nu(n)$ alakban, amelyek felírhatók különböző 2^i-1 alakú számok összegeként.*

Következő lépésként megmutatjuk, hogy van olyan r szám, ami relatív m-mel, és végtelen sokszor áll elő 2^i-1 alakú számok m-mel való osztási maradékaként, vagyis léteznek olyan $i_1<i_2<i_3<\ldots$ pozitív egészek, amelyekre

$$2^{i_1}-1\equiv 2^{i_2}-1\equiv 2^{i_3}-1\equiv\ldots\equiv r\pmod m.$$

Írjuk m-et $2^t u$ alakban, ahol u páratlan szám, és tekintsünk egy tetszőleges olyan $i\ge t$ pozitív egészt, amire $i-1$ osztható $\varphi(u)$-val. Nyilván végtelen sok ilyen i létezik. Az Euler–Fermat-tétel alapján minden egyes ilyen i értékre

$$u\big|2^{\varphi(u)}-1\big|2^{i-1}-1,$$

$$2^i-1=2(2^{i-1}-1)+1\equiv 1\pmod u, \tag{2}$$

és $i\ge t$ miatt

$$2^i-1\equiv -1\pmod{2^t}. \tag{3}$$

A 2^i-1 szám (2) és (3) miatt relatív prím u-val és 2^t-vel is, továbbá (2) és (3) egyértelműen meghatározza 2^i-1 maradékát modulo $[u,2^t]=m$. Ez a maradék tehát valóban végtelen sokszor előfordul.

Mivel m és r relatív prímek, az $r,2r,3r,\ldots$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo m, és létezik olyan u pozitív egész, amire $a\equiv ur\pmod m$. Ekkor az $n=2^{i_1}+\ldots+2^{i_u}$ számra

$$\nu(n)=\nu\big(2^{i_1}+\ldots+2^{i_u}\big)=\big(2^{i_1}-1\big)+\ldots+\big(2^{i_u}-1\big)\equiv u\cdot r\equiv a\pmod m.$$

Ezzel megkonstruáltuk a kívánt n számot.

Megjegyzések. 1. Ha $\nu_p(n)$-nel jelöljük tetszőleges p prímszámra és nemnegatív egész n-re a p kitevőjét az $n!$ prímtényezős felbontásában, akkor az úgynevezett *Legendre-formula* szerint

$$\nu_p(n)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Ha összeszámoljuk azt, hogy az $1,2,\ldots,n$ számok között hány p-vel osztható, hány p^2-tel osztható stb. van, éppen a jobboldalon álló összeget kapjuk. Ez szemléletesen bizonyítja a képletet.

A formálisabb bizonyításhoz tetszőleges ℓ pozitív egészre jelöljük $\mu_p(\ell)$-lel a p kitevőjét az ℓ prímtényezős felbontásában. Mivel szorzásnál a kitevők összeadódnak,

$$\nu_p(n)=\mu_p(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)=\mu_p(1)+\mu_p(2)+\ldots+\mu_p(n).$$

Tekintsük most az összes olyan (k,ℓ) párt, amelyekben $1\le\ell\le n$ és p^k osztója ℓ-nek, és számoljuk össze kétféleképpen az ilyen tulajdonságú párokat.

Először csoportosítsuk a (k,ℓ) párokat ℓ értékei szerint. Egy rögzített ℓ szám a p-nek mindig pontosan $\mu_p(\ell)$ különböző hatványával osztható: ezek a $p, p^2, \ldots, p^{\mu_p(\ell)}$ számok, ezért

$$\sum_{(k,\ell)} 1 = \sum_{\ell}^{n} \sum_{p^k \mid \ell} 1 = \sum_{\ell}^{n} \mu_p(\ell) = \nu_p(n). \tag{4}$$

Most csoportosítsuk a párokat k értékei szerint. Minden egyes k-ra azokat az ℓ-eket keressük, amelyek többszöresei p^k-nak; az $1, 2, \ldots, n$ között ezek száma $\left[\frac{n}{p^k}\right]$. A párok száma tehát

$$\sum_{(k,\ell)} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell \le n,\ p^k \mid \ell} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]. \tag{5}$$

A (4) és (5) képletek együtt bizonyítják a Legendre-formulát.

2. Az állítást a 2 helyett bármelyik másik prímmel kimondhatjuk; a bizonyítás minden nehézség nélkül átírható.