Megoldás. 1. Először számítsuk ki $f(0)$ értékét. A feltétel szerint $f(0)+0=f\big(f(0)\big)$, ahonnan $f(0)=f\big(f(0)\big)$. Az $f(x)+2x=f\big(f(x)\big)$ egyenletben x helyére $f(0)$-t helyettesítve (megtehetjük, mivel az értelmezési tartomány a valós számok halmaza):

$$f\big(f(0)\big)+2f(0)=f\Big(f\big(f(0)\big)\Big),$$

az $f(0)=f\big(f(0)\big)$ szerint: $3f(0)=f\big(f(0)\big)$, azaz $3f(0)=f(0)$, ahonnan $2f(0)=0$, tehát $f(0)=0$.

2. Bebizonyítjuk, hogy f szigorúan monoton. Ha nem lenne az, akkor lenne legalább két olyan hely, ahol ugyanazt az értéket veszi fel: $f(q)=f(r)=w$. Az $f(x)+2x=f\big(f(x)\big)$ egyenletbe beírva: $w+2q=f(w)$, és $w+2r=f(w)$. Átrendezve: $2q=f(w)-w=2r$, vagyis $r=q$. Tehát nincs két különböző érték, ahol ugyanakkora a függvényérték, vagyis f szigorúan monoton.

3. Mivel f szigorúan monoton, a 0-t csak 0-nál veszi fel.

Ha f szigorúan monoton nő, akkor $f(0)=0$ alapján $x>0$ esetén $f(x)>0$ és $x<0$ esetén $f(x)<0$, tehát $\dfrac{f(x)}{x}>0$.

Ha f szigorúan monoton csökken, akkor $f(0)=0$ alapján $x>0$ esetén $f(x)<0$ és $x<0$ esetén $f(x)>0$, tehát $\dfrac{f(x)}{x}<0$.

4. Definiáljuk az $f_n(x)$ sorozatot tetszőleges valós nemnulla x-re a következőképpen:

$$\begin{aligned}
&f_0(x)=x,\\
&f_1(x)=f(x),\\
&f_2(x)=f(x)+2x,\\
&f_3(x)=f_2(x)+2f_1(x),\\
&\qquad\dots\\
&f_k(x)=f_{k-1}(x)+2f_{k-2}(x).
\end{aligned}$$

Belátjuk, hogy

$$f_n(x)=\frac{f(x)+x}{3}\cdot 2^n+\frac{2x-f(x)}{3}\cdot(-1)^n.$$

A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük.

$n=0$-nál

$$f_0(x)=\frac{f(x)+x}{3}+\frac{2x-f(x)}{3}=x,$$

ami igaz, így definiáltuk $f_0(x)$-et.

Tegyük fel, hogy $n=k$-ra is igaz az állítás, megmutatjuk, hogy ekkor $n=(k+1)$-re is teljesül.

$$\begin{aligned}
&f_{k+1}(x)=f_k(x)+2f_{k-1}(x)=\\
&=\frac{f(x)+x}{3}\cdot 2^k+\frac{2x-f(x)}{3}\cdot(-1)^k+2\frac{f(x)+x}{3}\cdot 2^{k-1}+2\frac{2x-f(x)}{3}\cdot(-1)^{k-1}=\\
&=\frac{f(x)+x}{3}(2^k+2^k)+\frac{2x-f(x)}{3}\big((-1)^k+2(-1)^{k-1}\big)=\\
&=\frac{f(x)+x}{3}\cdot 2^{k+1}+\frac{2x-f(x)}{3}\cdot(-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés alapján tehát az állítás $n=(k+1)$-re is igaz, vagyis a képlet a teljes indukció elve szerint minden n-re használható.

$f_n(x)$ definíciójából:

$$\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=\frac{f\big(f_{n-1}(x)\big)}{f_{n-1}(x)}=\frac{\dfrac{f(x)+x}{3}\cdot 2^n+\dfrac{2x-f(x)}{3}\cdot(-1)^n}{\dfrac{f(x)+x}{3}\cdot 2^{n-1}+\dfrac{2x-f(x)}{3}\cdot(-1)^{n-1}}=$$

$$=\frac{\big(f(x)+x\big)\cdot 2^n+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^n}{\big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^{n-1}}.$$

5. Ha f szigorúan monoton csökken, akkor minden nemnulla y-ra

$$\frac{f(y)}{y}=\frac{f\big(f_{n-1}(x)\big)}{f_{n-1}(x)}=\frac{\big(f(x)+x\big)\cdot 2^n+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^n}{\big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^{n-1}}<0.$$

Három esetet vizsgálunk:

a) eset: $f(x)+x>0$. A számláló

$$\big(f(x)+x\big)\cdot 2^n+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^n \ge \big(f(x)+x\big)\cdot 2^n-\big|2x-f(x)\big|$$

és a nevező

$$\big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^{n-1} \ge \big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}-\big|2x-f(x)\big|.$$

Mivel $f(x)+x$ és $\big|2x-f(x)\big|$ is pozitív, azért létezik olyan pozitív egész n, amelyre

$$2^n>2^{n-1}>\frac{\big|2x-f(x)\big|}{f(x)+x},$$

ekkor viszont a számláló és a nevező is pozitív, tehát $\dfrac{f(y)}{y}>0$. Ellentmondásra jutottunk, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

b) eset: $f(x)+x<0$. A számláló

$$\big(f(x)+x\big)\cdot 2^n+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^n \le \big(f(x)+x\big)\cdot 2^n+\big|2x-f(x)\big|$$

és a nevező

$$\big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^{n-1} \le \big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}+\big|2x-f(x)\big|.$$

Mivel $f(x)+x$ és $-\big|2x-f(x)\big|$ is negatív, létezik olyan pozitív egész n, amelyre

$$2^n>2^{n-1}>\frac{-\big|2x-f(x)\big|}{f(x)+x},$$

ekkor viszont a számláló és a nevező is negatív, tehát $\dfrac{f(y)}{y}>0$. Ellentmondásra jutottunk, tehát ebben az esetben sincs megoldás.

c) eset: $f(x)+x=0$, tehát $f(x)=-x$. Ekkor

$$\frac{f\big(f_{n-1}(x)\big)}{f_{n-1}(x)}=\frac{\big(f(x)+x\big)\cdot 2^n+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^n}{\big(f(x)+x\big)\cdot 2^{n-1}+\big(2x-f(x)\big)\cdot(-1)^{n-1}}=$$

$$=\frac{(-x+x)\cdot 2^n+(2x+x)\cdot(-1)^n}{(-x+x)\cdot 2^{n-1}+(2x+x)\cdot(-1)^{n-1}}=-1<0.$$

Az $f(x)=-x$ függvény monoton, és a valós számok halmazán értelmezett, továbbá $f(x)+2x=f\big(f(x)\big)$ feltétel fennáll: $-x+2x=f(-x)$. Tehát $f(x)=-x$ megoldás.

6. Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor f szigorúan monoton nő. A feltételből:

$$x=\frac{f\big(f(x)\big)-f(x)}{2}.$$

Eszerint lehet definiálni az $f_{-n}(x)$ sorozatot tetszőleges valós nemnulla x-re:

$$f_{-n}(x)=\frac{f_{-n+2}(x)-f_{-n+1}(x)}{2}.$$

Állítás: $f\big(f_{-n}(x)\big)=f_{-n+1}(x)$. Teljes indukcióval bizonyítjuk:

A fentiekből következik, hogy $f_{-1}(x)=\dfrac{f(x)-x}{2}$, $x+f_{-1}(x)=f(x)$, vagyis $f\big(f_{-1}(x)\big)=f\big(f_0(x)\big)$. Tehát $n=1$-re az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $n=k$-ig igaz: $f\big(f_{-k}(x)\big)=f_{-k+1}(x)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $n=(k+1)$-re is:

$$f_{-(k+1)}(x)=\frac{f_{-(k-1)}(x)-f_{-k}(x)}{2},$$

innen $f_{-k}(x)+2f_{-(k+1)}(x)=f_{-(k-1)}(x)$ és az indukciós feltevés értelmében $f\big(f_{-k}(x)\big)=f_{-(k-1)}(x)$, tehát $f(x)+2x=f\big(f(x)\big)$ szerint

$$f\big(f_{-(k+1)}(x)\big)=f\big(f_{-k}(x)\big).$$

Tehát az állítás $n=(k+1)$-re igaz, vagyis minden pozitív egész n-re teljesül.

Belátjuk, hogy

$$f_n(x) = \frac{f(x)+x}{3} \cdot 2^n + \frac{2x - f(x)}{3} \cdot (-1)^n$$

negatív indexnél is igaz. A bizonyítás ismét teljes indukcióval történik:

$n = 0$-ra, $n = 1$-re igaz a képlet, már láttuk. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra, $n = (k+1)$-re igaz a képlet, bebizonyítjuk, hogy $n = (k-1)$-re is:

$$f_{k-1}(x) = \frac{f_{k+1}(x) - f_k(x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{f(x)+x}{3} \cdot 2^{k+1} + \frac{2x - f(x)}{3} \cdot (-1)^{k+1} -$$

$$- \frac{f(x)+x}{3} \cdot 2^k - \frac{2x - f(x)}{3} \cdot (-1)^k \Bigg) =$$

$$= \frac{f(x)+x}{3} \cdot 2^{k-1} + \frac{2x - f(x)}{3} \cdot (-1)^{k-1}.$$

A képlet $n = (k-1)$-re is igaz, így a teljes indukció elve szerint érvényes minden negatív n-re is. Tehát tetszőleges egész n-re:

$$f_n(x) = \frac{f(x)+x}{3} \cdot 2^n + \frac{2x - f(x)}{3} \cdot (-1)^n.$$

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor f szigorúan monoton nő, tehát $f(y)/y$ pozitív tetszőleges valós y-ra. Ha n negatív, akkor

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} = \frac{f\big(f_n(x)\big)}{f_n(x)} = \frac{\big(f(x)+x\big) \cdot 2^{n-1} + \big(2x - f(x)\big) \cdot (-1)^{n-1}}{\big(f(x)+x\big) \cdot 2^n + \big(2x - f(x)\big) \cdot (-1)^n} > 0.$$

Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $f(x) = 2x$. Ekkor a hányados $1/2$, pozitív. f szigorúan monoton nő, $f(x) + 2x = f\big(f(x)\big)$-be helyettesítve: $4x = f(2x)$, ami igaz.

2. eset: $f(x) \neq 2x$. Ekkor tetszőleges negatív páros n-re:

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} = \frac{f\big(f_n(x)\big)}{f_n(x)} = \frac{\big(f(x)+x\big) \cdot 2^{n-1} + \big(2x - f(x)\big)}{\big(f(x)+x\big) \cdot 2^n + \big(2x - f(x)\big)} > 0.$$

Ha n tart mínusz végtelenhez, akkor $\big(f(x)+x\big) \cdot 2^{n-1}$ és $\big(f(x)+x\big) \cdot 2^n$ tart 0-hoz, a hányados pedig -1-hez, tehát a hányados negatív.

Ellentmondásra jutottunk, tehát, ha f monoton nő, akkor csak az első eset felel meg a feltételnek.

Minden esetet megvizsgáltunk, tehát a függvényegyenlet összes megoldása: $f(x) = -x$, és $f(x) = 2x$.