

Megoldás. Vegyük észre, hogy az $f \equiv 0$ függvény teljesíti a feladatban leírt feltételeket. Megmutatjuk, hogy ezen kívül nincs más ilyen tulajdonságú függvény.

A *(iv)* feltételből $x = y = z = 0$ helyettesítéssel adódik, hogy $3f(0) = f(0)^3$, azaz $f(0)(f(0)^2 - 3) = 0$. Innen $f(0) = 0$ vagy $f(0)^2 = 3$ következik, ám az utóbbi lehetőség ellentmond *(ii)*-nek, így $f(0) = 0$. Ezek után $y = -x$ és $z = 0$ helyettesítéssel *(iv)* $f(x) + f(-x) = 0$ alakot ölt, tehát $f(x) = -f(-x)$ teljesül minden x egész számra, vagyis f páratlan függvény. Végül az $y = x$ és $z = -2x$ helyettesítéssel *(iv)*-ből azt kapjuk, hogy $2f(x) - f(2x) = -f(x)^2 f(2x)$, azaz

$$(1) \quad 2f(x) = f(2x)(1 - f(x)^2).$$

Tegyük fel tehát, hogy $f \not\equiv 0$, azaz van olyan x egész, amire $f(x) \neq 0$. Ekkor (1) bal oldala nemnulla, így a jobb oldal sem lehet zérus, tehát $|f(x)| \neq 1$ teljesül minden olyan x egészre, ami nem gyöke f -nek. Más szóval az f függvény nem veszi fel az 1 és -1 értékek egyikét sem. Láttuk, hogy $f(0) = 0$, ezért *(iii)* miatt $|f(n)| < 1$ teljesül minden n egészre. Ha tehát $0 < |f(x)| < 1$, akkor (1) miatt

$$|f(2x)| = \left| \frac{2f(x)}{1 - f(x)^2} \right| = \frac{|2f(x)|}{|1 - f(x)^2|} > \frac{2|f(x)|}{1} = 2|f(x)|$$

adódik, azaz $|f(2^n x)| > 2^n |f(x)|$, ha $n > 1$ egész. Legyen n olyan pozitív egész, amire $2^n > \frac{1}{|f(x)|}$ teljesül. Ekkor

$$|f(2^n x)| > 2^n |f(x)| > \frac{1}{|f(x)|} |f(x)| = 1,$$

márpedig ez ellentmond a fenti megfigyelésnek, ami szerint $|f| < 1$. Tehát $f \equiv 0$ az egyedüli olyan függvény, ami teljesíti az *(i)*–*(iv)* feltételeket. $\square$

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy a feladat *(iv)* feltétele teljesül a tangens függvényre. Ez a megfigyelés, mint láttuk, nem szükséges a megoldáshoz, de ennek ismerete rávilágít annak ötletére. Ha ugyanis az f függvényre fennáll a *(iv)* tulajdonság, akkor $\alpha := \arctg(f(1))$ választással tetszőleges n pozitív egészre $f(n) = \operatorname{tg}(n \cdot \alpha)$ adódik. Mivel $\operatorname{tg}(\pm \frac{\pi}{2})$ nem értelmes, azért $n \cdot \alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ semmilyen egész n , k esetén sem teljesülhet, így olyan egész m sem létezik, amire $\operatorname{tg}(m\alpha) = \pm 1$ áll. A *(iii)* feltétel miatt ekkor $|f| < 1$, márpedig ha $\operatorname{tg}(\alpha) \neq 0$, akkor az α alkalmas többszörösének tangense 1-nél nagyobb abszolút értékű lesz.