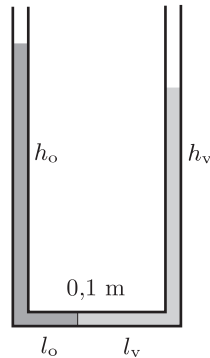


I. megoldás. Számoljuk ki először gyorsításmentes esetben a víz és az olaj elhelyezkedését! A kicsiny sűrűségkülönbség miatt feltételezhetjük, hogy a víz és az olaj elválástó felülete az U alakú cső vízszintes részére esik, a függőleges szárakban pedig h_v magasan víz, illetve h_o magasan olaj található (1. ábra). Mivel a két folyadék teljes hossza 0,4 m, a vízszintes szakasz pedig (ha a hajlatok térfogatát elhanyagoljuk) 0,1 m hosszú, fennáll, hogy $h_v + h_o = 0,3$ m, azaz

$$(1) \quad h_o = 0,3 - h_v.$$

(Itt és a továbbiakban az SI mértékegységeket az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki.)



1. ábra

Egyensúlyban a két függőleges szárban a hidrosztatikai nyomás megegyezik:

$$\rho_o \cdot g \cdot h_o = \rho_v \cdot g \cdot h_v,$$

ahonnan (1) felhasználásával:

$$800 (0,3 - h_v) = 1000 h_v.$$

Ennek megoldásából (három tizedesjegy pontossággal számolva)

$$h_v = 0,133, \quad h_o = 0,166,$$

a víz és az olaj szintkülönbségére (a levegővel érintkező folyadékfelszínek magasságkülönbségére) pedig

$$\Delta h_0 = h_v - h_o = -0,033 \text{ m},$$

vagyis kb. 3,3 cm adódik. (A nullás index a gyorsításmentes esetre utal, a negatív előjel pedig azt fejezi ki, hogy ebben az esetben az olaj áll magasabban.) A vízszintes csőszárban

$$l_o = 0,2 - h_o = 0,033$$

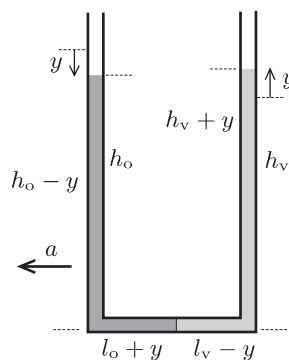
hosszan olaj,

$$l_v = 0,2 - h_v = 0,067$$

méternyi darabon pedig víz található.

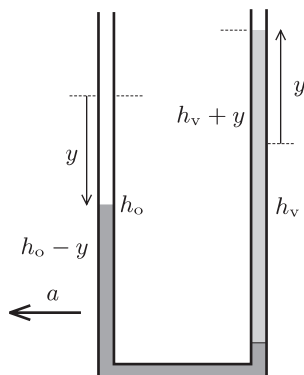
A rendszer gyorsítása során a jobb oldali ágban a víz megemelkedik valamekkora y értékkel, a bal oldali ágban pedig az olaj lesüllyed (vagy akár el is tűnhet ebből a szárból). Emiatt a vízszintes csőszakasz jobb oldali végénél nagyobb, a bal oldali végénél pedig kisebb lesz a nyomás, mint a fentebb számolt egyensúlyi esetben. A nyomáskülönbségből számolható eredő vízszintes erő hozza létre a vízszintes csőszárban levő folyadék gyorsulását. A továbbiakban három esetet kell megkülönböztessünk.

1. Nem túl nagy gyorsulásnál a folyadékszintek csak kicsit változnak meg, az olaj részben a bal oldali függőleges szárban, részben a vízszintes csőszár egyik darabjában helyezkedik el (2. ábra). Ez $0 < y < 0,067$ vízszintemelkedések esetén teljesül.



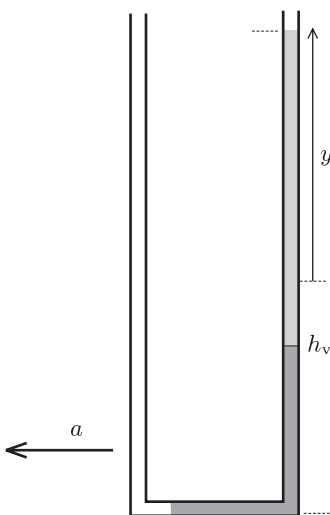
2. ábra

2. Közepesen nagy gyorsulásoknál már a jobb oldali függőleges szárba is kerül olaj, de a bal oldali függőleges szár még nem ürül ki teljesen (3. ábra). Ennek feltétele: $0,067 < y < 0,167$.



3. ábra

3. Nagyon nagy gyorsulásoknál már csak a vízszintes csőszakar egy részében és a jobb oldali függőleges szárban található olaj, a bal oldali függőleges szár teljesen kiürül (4. ábra). Ez az eset akkor áll fenn, ha $0,167 < y < 0,267$.



4. ábra

Határozzuk meg a szintkülönbségeket a vízszintes folyadék szakaszra felírt mozgásegyenlet felhasználásával! Az 1. esetben a jobb oldali függőleges csőszakar alján $\rho_v g y$ -nal megnő, a bal oldali szár alján pedig $\rho_o g y$ értékkel lecsökken a nyomás a gyorsításmentes (egyensúlyi) helyzethez képest. Ez a két nyomásváltozás együttesen

$$F = (\rho_v + \rho_o) g y A$$

erőt eredményez a vízszintes folyadékra (A a cső keresztmetszete). A mozgásegyenlet:

$$(\rho_o + \rho_v) g y A = A [\rho_o (l_o + y) + \rho_v (l_v - y)] a.$$

Ez (az ismert és kiszámított adatok behelyettesítése után)

$$1,8 y = [0,8(0,033 + y) + 0,067 - y] \frac{a}{g}$$

alakra hozható, s ebből a $\Delta h = 2y + \Delta h_o$ szintkülönbség kiszámítható:

$$(2) \quad \Delta h = 0,3 \cdot \frac{3 \frac{a}{g} - 1}{\frac{a}{g} + 9}.$$

A fenti képlet érvényességének feltétele $0 < y < 0,067$; ez pedig

$$(2a) \quad 0 < \frac{a}{g} < 1,5$$

esetén teljesül.

A 2. esetben (lásd a 3. ábrát) a vízszintes csődarabban levő $0,1 \cdot 800 \cdot A$ tömegű olajat a jobb oldali szárban levő $0,2$ m magas vízoszlop és a $h_v + y - 0,2$ magasságú olaj nyomása, valamint a bal oldali szárban levő $h_o - y$ magas olaj nyomásának különbsége gyorsítja:

$$0,1 \cdot 800 A \cdot a = [0,2 \cdot 1000 + 800 \cdot (h_v + y - 0,2) - 800 \cdot (h_o - y)]gA.$$

Ebből $y = 0,05 \frac{a}{g} - 0,0083$, illetve

$$(3) \quad \Delta h = 0,05 \cdot \frac{a}{g} - 0,05$$

adódik. A fenti képlet akkor érvényes, ha $0,067 < y < 0,167$, ez pedig

$$(3a) \quad 1,5 < \frac{a}{g} < 3,5$$

gyorsulások esetén teljesül.

Végül vizsgáljuk meg a 4. ábrának megfelelő lehetőséget! A szintkülönbség most éppen a jobb oldali folyadékoszlop magassága: $\Delta h = h_v + y$, melyből $0,2$ méternyi a víz, a többi $\Delta h - 0,2$ pedig olaj. A vízszintes csődarabban levő olaj hossza nyilván $0,4 - \Delta h$, így a mozgásegyenlet:

$$[0,2 \cdot 1000 + (\Delta h - 0,2) \cdot 800]gA = 800 \cdot A(0,4 - \Delta h)a,$$

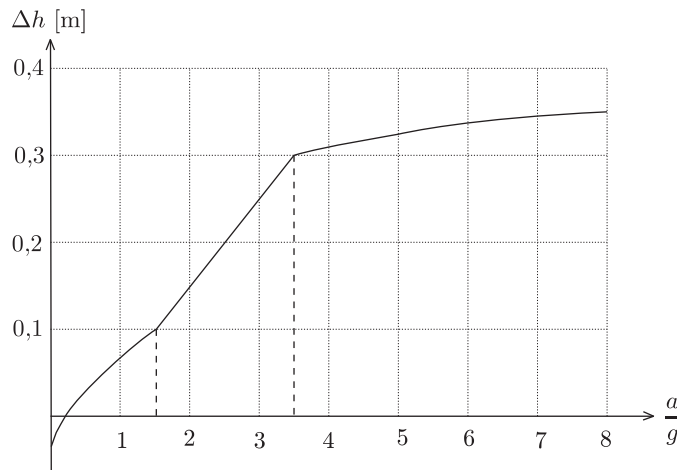
amelyből a szintkülönbség kifejezhető:

$$(4) \quad \Delta h = \frac{0,4 \frac{a}{g} - 0,05}{1 + \frac{a}{g}}.$$

A fenti összefüggés érvényességi köre (3a) felső határától tetszőlegesen nagy gyorsulásokig terjed, vagyis

$$(4a) \quad 3,5 < \frac{a}{g} < \infty.$$

Eredményeinket az 5. ábrán látható grafikon foglalja össze, mely a (2), (3), (4) képletek felhasználásával és a (2a), (3a), (4a) feltételek figyelembe vételével rajzolható meg. A grafikon egy hiperbola-ívből, egy egyenes szakaszból és egy másik hiperbola-ívből áll. Ezek a görbék folytonosan csatlakoznak egymáshoz, de a csatlakozási pontban a meredekségük ugrásszerűen megváltozik.



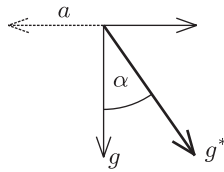
5. ábra

II. megoldás. Írjuk le a jelenséget az U alakú csővel együttmozgó, balra gyorsuló koordináta-rendszerből! Ebben a vonatkoztatási rendszerben a függőleges mg gravitációs erő mellett minden testre hat még egy vízszintes, jobbra mutató, ma nagyságú „tehetetlenségi erő” is. Ezen két erő eredője éppen olyan, mintha a gravitációs gyorsulás

$$g^* = \sqrt{g^2 + a^2}$$

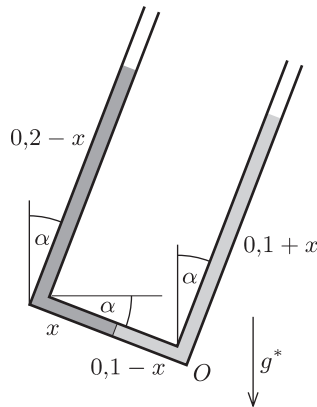
nagyságú lenne, és az iránya a valódi függőlegessel α szöget zárna be (6. ábra), ahol

$$(5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}.$$



6. ábra

Határozzuk meg a csőben levő folyadékok egyensúlyi helyzetét abban az esetben, amikor az olaj és a víz határfelülete az U alakú cső alsó, összekötő szakaszára esik. Írjuk fel a hidrosztatikai nyomások egyensúlyi feltételét mondjuk a 7. ábrán látható O pontra!



7. ábra

Az ábra jelöléseit használva (és a hosszúságokat méterben mérve, de az SI mértékegységeket az egyszerűség kedvéért leahagyva) mondhatjuk:

$$\begin{aligned} \rho_v g^* (0,1 + x) \cos \alpha &= \rho_v g^* (0,1 - x) \sin \alpha + \\ &+ \rho_o g^* x \sin \alpha + \rho_o g^* (0,2 - x) \cos \alpha. \end{aligned}$$

A sűrűségs adatok behelyettesítése és $\cos \alpha$ -val való osztás után kapjuk:

$$0,1 + x = (0,1 - x) \operatorname{tg} \alpha + 0,8 x \operatorname{tg} \alpha + 0,8(0,2 - x).$$

Ebből (5) felhasználásával az alsó szárban levő olaj hosszára

$$x = \frac{0,3 + 0,5 \frac{a}{g}}{\frac{a}{g} + 9},$$

a folyadékok szintkülönbségére

$$\Delta h = (0,1 + x) - (0,2 - x) = \frac{0,9 \frac{a}{g} - 0,3}{\frac{a}{g} + 9}$$

adódik, összhangban az I. megoldás (2) képletével. Ez az összefüggés csak addig érvényes, amíg $x < 0,1$ (vagyis amíg az olaj még nem folyik át a jobb oldali csőszárba); ez pedig $\frac{a}{g} < 1,5$ -re teljesül; egyezően az I. megoldás (2a) feltételével.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk meg a (3) és (4) összefüggéseket és (3a), (4a) feltételeket is.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a cső keresztmetszete elegendően kicsi ahhoz, hogy az olajat és a vizet „folyadékszál” alakban tartsa, ne engedje összekeveredni azokat. Ez azonban csak kapillárisokra igaz, az 1 cm²-es cső pedig nem tekinthető annak. A valóságban az olaj átfolyhat a víz felett a vízszintes csőben, tehát a folyamat a fentebb leírtaktól eltérő módon megy végbe. Ha a megadottnál kisebb keresztmetszetű csövet választunk (a keresztmetszet a számolásból kiesett), akkor érvényesnek vélhetjük a fenti megoldásokat. Sajnos a helyzet még ekkor sem egyszerű! Az olaj átfolyását a kapillaritás akkor akadályozhatja meg, ha a folyadékfelszíneken és a határfelületen a görbületi nyomás összemérhető a hidrosztatikai nyomásokkal; ekkor pedig a kapilláris jelenségeket is figyelembe kellene venni a megoldásban.