

I. megoldás. Tetszőleges a, b, c, d számokra

$$\begin{aligned} & (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d) = \\ & = ((a+b)^2 - (c+d)^2)((a-b)^2 - (c-d)^2) = \\ & = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab - 2cd)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2ab + 2cd) = \\ & = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - (2ab - 2cd)^2 = \\ & = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2 + 8abcd. \end{aligned}$$

Ezt a 0-val egyenlő számot az $S = 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd$ számból kivonva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2, \end{aligned}$$

ami valóban egy egész szám négyzete.

II. megoldás. Írjuk az $a + b + c + d = 0$ feltételt $a + b = (-1)(c + d)$ alakba. Ennek mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + d^2 + 2cd, \quad (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = 2(cd - ab).$$

Ismételt négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + c^4 + d^4 + 2c^2d^2 - 2(a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2) &= \\ &= 4c^2d^2 + 4a^2b^2 - 8abcd. \end{aligned}$$

Innen pedig valóban

$$\begin{aligned} & 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2. \end{aligned}$$