

**Megoldás.** Legyen  $x' = x + 1$ . A kifejezéshez az

$$S = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'}$$

menntisét hozzáda egész számot (4-et) kapunk. Szükséges és elégséges feltétel tehát, hogy az 1-nél nagyobb, páronként különböző  $a', b', c', d'$  egész számokra  $S$  értéke is egész legyen. Mivel

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 2,$$

ez csak úgy lehet, ha  $S = 1$ . Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy  $a' < b' < c' < d'$ . Ha  $a' \geq 3$ , akkor  $S \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < 1$ , ezért szükségképpen  $a' = 2$ ,

$$S' = \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{2}.$$

Ha  $b' \geq 6$  lenne, akkor  $S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < 1$  lenne, ezért  $3 \leq b' \leq 5$ . A  $b' = 5$  esetet könnyen kizárhatjuk, ekkor ugyanis  $c' \geq 6$ . Ha  $c' = 6$  lenne, akkor

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$$

lenne, ami nem lehetséges. Ha pedig  $c' \geq 7$ , akkor  $d' \geq 8$ , és így  $S' < 1/2$ .

A  $b' = 4$  esetben

$$\frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{4},$$

vagyis  $c'd' = 4c' + 4d'$ , és így  $(c' - 4)(d' - 4) = 16$ . Mivel  $1 \leq c' - 4 < d' - 4$  egész számok, ez csak úgy lehetséges, ha  $c' - 4 = 1$  és  $d' - 4 = 16$ , vagy  $c' - 4 = 2$ ,  $d' - 4 = 8$ . Az első esetben  $c' = 5$  és

$d' = 20$ , a másodikban  $c' = 6$  és  $d' = 12$ . A  $b' = 3$  esetben hasonló gondolatmenettel  $\frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{6}$  alapján  $(c' - 6)(d' - 6) = 36$  adódik, ahol  $-2 \leq c' - 6 < d' - 6$ . Innen a  $(c' - 6; d' - 6)$  számpár lehetséges értékeire  $(1; 36)$ ,  $(2; 18)$ ,  $(3; 12)$  és  $(4; 9)$  adódik, vagyis ebben az esetben a  $(c'; d')$  számpár  $(7; 42)$ ,  $(8; 24)$ ,  $(9; 18)$ , illetve  $(10; 15)$  lehet.

A feltételt tehát 6 különböző  $a' < b' < c' < d'$  számnégyes elégíti ki. Ennek megfelelően a feladatnak  $6 \cdot 4! = 144$  különböző megoldása van, melyeket az  $(1; 3; 4; 19)$ , az  $(1; 3; 5; 11)$ , az  $(1; 2; 6; 41)$ , az  $(1; 2; 7; 23)$ , az  $(1; 2; 8; 17)$ , illetve az  $(1; 2; 9; 14)$  számnégyesek összes lehetséges permutációjával kaphatunk meg.