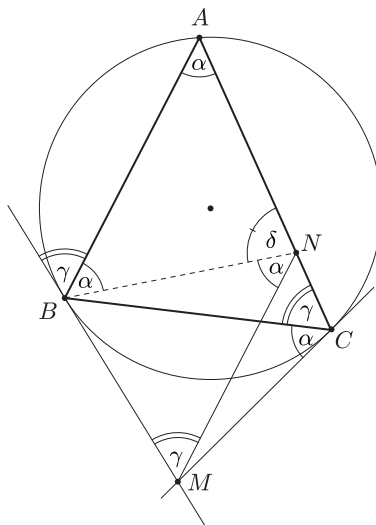


Megoldás. Három esetet különböztetünk meg.

I. A háromszögben az A pontnál hegyesszög van (1. ábra). Legyen $\angle BCA = \gamma$. Ekkor a B csúcsnál lévő, AB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög is γ . $\angle NMB = \gamma$, mert $NM \parallel AB$.



1. ábra

Legyen $\angle BAC = \alpha$, ekkor $\angle BCM = \alpha$, mert a BC ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög.

Mivel $\angle BMN = \angle BCN = \gamma$, azért $BMCN$ húrnégyszög, hiszen a körülírt körében ezek a szögek a BN ívhez tartozó kerületi szögek. Így $\angle BNM = \angle BCM = \alpha$, mert az előbbi körben a BM ívhez tartozó kerületi szögek.

$\angle MBA = 180^\circ - \gamma$, ezért

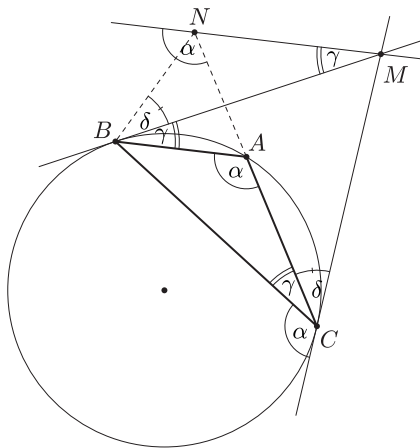
$$\angle ANM = 360^\circ - (\alpha + \gamma + 180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \alpha.$$

Ebből következik, hogy $\angle BNA = \delta = 180^\circ - 2\alpha$.

Így $\angle ABN = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + \alpha) = \alpha$, tehát a BNA háromszög egyenlő szárú, így $AN = BN$.

II. A háromszögben az A pontnál derékszög van. Ekkor a B és C pontban húzott érintők párhuzamosak, mert a BC oldal átmérő a körben. Az M pont nem jön létre, így ekkor az állítás nem igaz.

III. A háromszögben az A pontnál tompaszög van (2. ábra). Legyen $\angle BAC = \alpha$. Ekkor a C csúcsnál lévő, AB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög is α . Az N csúcsnál is α szög van, mert $NM \parallel AB$.



2. ábra

Legyen $\angle BCA = \gamma$, ekkor $\angle ABM = \gamma$, mert az AB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög. $\angle BMN = \gamma$, mert váltószögek ABM -gel. Így $BMCN$ húrnégyszög, mert a körülírt körében $\angle BMN$ és $\angle BCN$ szögek a BN ívhez tartozó kerületi szögek.

Így $\angle MCN = \delta = 180^\circ - \alpha - \gamma = \angle MBN$, mert az előbbi körben az MN ívhez tartozó kerületi szögek.

$$\angle NBA = \angle MBN + \gamma = 180^\circ - \alpha - \gamma + \gamma = 180^\circ - \alpha = \angle NAB,$$

tehát az ABN háromszög egyenlő szárú, így $AN = BN$.