

Megoldás. Ismeretes, de a szögösszegezési azonosságok felhasználásával könnyen ki is számíthatjuk, hogy $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ és $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$. Ezeket az összefüggéseket az egyenletbe írva kapjuk, hogy

$$1 + 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2(2 \cos^2 x - 1).$$

Alakítsuk szorzattá az egyenleteket:

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - 4 \cos^2 x + 3 = 0,$$

$$4 \cos^2 x (\cos x - 1) - 3(\cos x - 1) = 0,$$

$$(4 \cos^2 x - 3)(\cos x - 1) = 0.$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz

1) Vagy $4 \cos^2 x = 3$, $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Innen

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,$$

ahol k egész.

2) Vagy $\cos x = 1$ és $x = 2l\pi$, ahol l egész.

A megoldások:

$$x_1 = 2k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\pi,$$

ahol k tetszőleges egész szám.