

Ennek a feladatnak a megoldásában kulcsszerepet játszik a relativisztikus, longitudinális Doppler-effektus. Ha az ω körfrekvenciájú fényt kibocsátó fényforrás a megfigyelőhöz képest v relatív sebességgel mozog, akkor a megfigyelő által észlelt ω' körfrekvencia

$$(8) \quad \omega' = \omega \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}} \approx \omega \left(1 \pm \frac{v}{c}\right),$$

ahol c a fénysebesség, és a második, közelítő egyenlőség akkor igaz, ha $\frac{v}{c} \ll 1$. A felső előjelezés akkor érvényes, ha a fényforrás és a megfigyelő közelednek egymáshoz, az alsó pedig akkor, ha távolodnak. (A közelítés az $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ formula többszöri alkalmazásával kapható meg.)

Jelölje ω_L a lézer laboratóriumában mért körfrekvenciáját, legyen $\hbar\omega_0$ az atom két állapota közti energiakülönbség. Ekkor a $-x$ tengely irányába haladó foton energiája $\hbar\omega_L$, impulzusa $-\frac{\hbar\omega_L}{c} = -\hbar q$, ahol q a hullámszám.

A feladatmegoldás során végig feltételezzük, hogy $\frac{v}{c} \ll 1$, valamint

$$\frac{\hbar q}{mv} = \frac{\hbar\omega_L}{mvc} \ll 1,$$

és ezen kis mennyiségekben első rendig számolunk.

I. rész: A lézeres hűtés alapjai

1. Elnyelés (abszorpció)

A (8) egyenlet alapján a fényforráshoz v sebességgel közeledő atom által észlelt frekvencia $\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$, tehát a rezonanciafeltétel $\omega_0 = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. A foton elnyelése után az atom impulzusa a foton impulzusával csökken, így $p_a = mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$. Az atom teljes energiája a mozgási energiájának és a gerjesztési energiának az összege, azaz

$$\varepsilon_a = \frac{p_a^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L.$$

2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban

A $v' = v - \frac{\hbar\omega_L}{vc}$ sebességgel mozgó atom saját rendszerében ω_0 frekvenciájú fotont bocsát ki, ami azt jelenti, hogy a labor rendszeréből a foton frekvenciája

$$(9) \quad \omega_0 \left(1 - \frac{v'}{c}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\hbar\omega_L v}{mvc}\right) \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \omega_L.$$

Innen a foton energiája és impulzusa egyszerűen kiszámolható:

$$(10a) \quad p_f^- \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \quad \varepsilon_f^- \approx \hbar\omega_L.$$

A foton kibocsátása után az atom impulzusa ezzel az értékkel nő, így

$$(10b) \quad p_a^- \approx mv, \quad \varepsilon_a^- = \frac{(p_a^-)^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}.$$

Végeredményben az abszorpció-emissziós folyamat után a két részecske állapota olyan, mintha a foton nem is lépett volna kölcsönhatásba az atommal.

3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban

Ha az atom $+x$ irányban bocsátja ki a fotont, akkor labor rendszerében nagyobbak észleljük a foton frekvenciáját. Az előző (9) levezetéshez hasonlóan kell számolnunk, azonban v' előjele módosul:

$$\omega_0 \left(1 + \frac{v'}{c}\right) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \omega_L \left(1 + \frac{2v}{c}\right).$$

Ezután már könnyen megkapjuk a foton, illetve az atom energiáját és impulzusát:

$$(11a) \quad p_f^+ \approx \frac{\hbar\omega_L}{c} \left(1 + \frac{2v}{c}\right), \quad \varepsilon_f^+ \approx \hbar\omega_L \left(1 + \frac{2v}{c}\right),$$

$$(11b) \quad p_a^+ \approx mv - \frac{2\hbar\omega_L}{c}, \quad \varepsilon_a^+ \approx \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{4\hbar\omega_L}{mvc}\right).$$

4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után

Mint ahogy a spontán emisszió egyforma valószínűséggel mehet végbe $+x$ és $-x$ irányban, a keresett átlagértékek a (10) és (11) mennyiségek számtani közepéiként kaphatók meg:

$$(12a) \quad \bar{p}_f \approx \frac{\hbar\omega_L v}{c^2} \approx 0, \quad \bar{\varepsilon}_f \approx \hbar\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

$$(12b) \quad \bar{p}_a \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}, \quad \bar{\varepsilon}_a \approx \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{2\hbar\omega_L}{mvc}\right).$$

5. Energia- és impulzusátadás

A $-x$ irányban haladó foton által az atomnak átlagosan átadott impulzus és energia a kölcsönhatás utáni (12) átlagértékek és a kezdeti értékek különbségeként kapható meg:

$$(13) \quad \Delta p^- = \bar{p}_a - mv \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \quad \Delta \varepsilon^- = \bar{\varepsilon}_a - \frac{mv^2}{2} \approx -\frac{\hbar\omega_L v}{c}.$$

6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral

Ha a foton nem szemből, hanem az atommal azonos irányból érkezik, teljesen hasonló módon ellentétes előjelű eredményeket kapunk az átlagos energia- és impulzusátadásra:

$$(14) \quad \Delta p^+ \approx \frac{\hbar\omega'_L}{c}, \quad \Delta \varepsilon^+ \approx \frac{\hbar\omega'_L v}{c}.$$

II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai

A feladat közlése szerint a laboratóriumban *nyugalomban* levő atomok

$$(15) \quad P_g(\omega_L) = \frac{N_g}{N} = \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}.$$

valószínűséggel található gerjesztett állapotban az ω_L frekvenciájú fotonokkal való kölcsönhatás eredményeként. A képletben Ω_R az úgynevezett Rabi-frekvencia, melynek négyzete a lézer intenzitásával arányos, Γ pedig az adott átmenet élettartamának reciproka. Látható, hogy ez a valószínűség $\omega_L = \omega_0$ esetén maximális, nem haladja meg az $\frac{1}{2}$ értéket, és $|\omega_L - \omega_0| \gg \Gamma, \Omega_R$ esetén gyorsan csökken.

7. A lézer által az atomnyalábra kifejtett erő

A (15) képlet nyugalomban levő atomokra vonatkozik, tehát csak úgy használhatjuk, ha áttérünk az atomokkal együtt v sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe. Ekkor azonban Doppler-eltolódás miatt a $-x$ irányban haladó fotonok frekvenciáját $\omega^- = \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ -nek, míg a $+x$ irányban haladókat $\omega^+ = \omega_L \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ -nek észleljük. Mindkét fotonnyaláb egymástól függetlenül gerjeszti az atomok $N_g = NP_g$ részét, így időegységenként ΓN_g elnyelési-kibocsátási folyamat megy végbe a balra, illetve jobbra haladó fotonokkal. Felhasználva a (13) és (14) eredményeket, a keresett erő:

$$\begin{aligned} F &= \Gamma N (P_g(\omega^-) \Delta p^- + P_g(\omega^+) \Delta p^+) = \\ &= \frac{\Omega_R^2 N \Gamma \hbar \frac{\omega_L}{c}}{(\omega_0 - \omega_L (1 - \frac{v}{c}))^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2 N \Gamma \hbar \frac{\omega_L}{c}}{(\omega_0 - \omega_L (1 + \frac{v}{c}))^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}. \end{aligned}$$

8. Kisebességű határeset

Az erőre kapott formula

$$F = \frac{A}{B+C} - \frac{A}{B-C} \approx \frac{A}{B} \left(1 - \frac{C}{B} - \left(1 + \frac{C}{B}\right)\right) = -\frac{2AC}{B^2}$$

alakú, ahol $C \ll B$. A számolást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(16) \quad F \approx -\frac{4\Omega_R^2 N \Gamma \hbar \left(\frac{\omega_L}{c}\right)^2}{\left((\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2\right)^2} (\omega_0 - \omega_L) v.$$

Látható, hogy az erő pozitív (gyorsító), ha $\omega_L > \omega_0$, zérus, ha $\omega_L = \omega_0$, és negatív (lassító), ha $\omega_L < \omega_0$. Természetesen a jelenség független az x tengely irányításától, tehát ha a lézer frekvenciáját kicsit az átmenet „alá hangoljuk”, akkor mindig az atom mozgásával ellentétes irányú a fotonok által kifejtett erő.

9. Optikai szirup

Ha az atomokra sebességükkel arányos fékezőerő hat, akkor mozgásegyenletük $m\dot{v} = -\beta v$, ahol a $\beta > 0$ konstans a (16) egyenletből kiolvasható. Figyelembevétel a $v(0) = v_0$ kezdeti feltételt, az atomok sebessége a

$$v(\tau) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau}$$

függvény szerint csökken. Az ekvipartíció-tétel értelmében $T \sim v^2$, tehát a hőmérséklet $T(\tau) = T_0 e^{-\frac{2\beta}{m}\tau}$ időfüggést mutat.