I. megoldás. Ha $n \leq k$, akkor az adott számok között szerepel $\binom{k}{k} = 1$, ezért az állítás nyilvánvaló.

Tudjuk, hogy minden $0 \leq \ell \leq m$ egészre $\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell+1} = \binom{m+1}{\ell+1}$. Ezért

$$\binom{m}{\ell} = \binom{m+1}{\ell+1} - \binom{m}{\ell+1},$$

vagyis $\binom{m}{\ell+1}$ és $\binom{m+1}{\ell+1}$ minden közös osztója egyúttal $\binom{m}{\ell}$-nek is osztója.

Legyen az

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

számok legnagyobb közös osztója d. Ekkor az előző bekezdésben leírtakat az $\ell + 1 = k$ és $m = n, n+1, \ldots, n+k-1$ esetekben alkalmazva kapjuk, hogy d osztója az

$$\binom{n}{k-1}, \binom{n+1}{k-1}, \ldots, \binom{n+k-1}{k-1}$$

számok mindegyikének. Ismét alkalmazzuk az oszthatóságra vonatkozó állításunkat, most az $\ell + 1 = k - 1$ és $m = n, n+1, \ldots, n+k-2$ számokra. Azt kapjuk, hogy d osztója az

$$\binom{n}{k-2}, \binom{n+1}{k-2}, \ldots, \binom{n+k-2}{k-2}$$

számoknak is. Ezt az eljárást lépésről-lépésre folytatva kapjuk, hogy d osztója az

$$\binom{n}{k-i}, \binom{n+1}{k-i}, \ldots, \binom{n+k-i}{k-i}$$

számoknak, minden $i < k$ pozitív egész esetén.

Ezért, ha $i = k-1$, akkor azt kapjuk, hogy $\binom{n}{1}$ és $\binom{n+1}{1}$ is, s így

$$\binom{n+1}{1} - \binom{n}{1} = \binom{n}{0} = 1$$

is osztható d-vel. Vagyis $d = 1$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Ha $n \leq k$, akkor az első megoldásban leírtak miatt igaz az állítás. A továbbiakban tegyük fel, hogy $n > k$. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy bármely p prímszámra található az $\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$ számok között legalább egy olyan, amely nem osztható p-vel.

Rögzítsük a p prímszámot. Tekintsük az $n-k+1$, $n-k+2$, $\ldots$, n, $n+1$, $\ldots$, $n+k$ számokat. Az adott binomiális együtthatók mindegyike egy olyan törtként írható fel, amelynek számlálójában ezek közül k darab egymást követő szám szorzata áll, nevezője pedig $k!$. Ha p nem osztója egyik számnak sem, akkor készen vagyunk. Ha p osztója az $n-k+1$, $n-k+2$, $\ldots$, $n+k$ számok közül néhánynak, akkor pedig válasszunk ki közülük egy olyan m számot, amely p-nek a lehető legnagyobb hatványával, mondjuk p^α-val osztható. Először vizsgáljuk meg az $n-k+1 \leq m \leq n$ esetet. Tekintsük az

$$\binom{m+k}{k} = \frac{(m+k)(m+k-1) \cdot \ldots \cdot (m+1)}{k(k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

binomiális együtthatót. Az α definíciójából következően a számlálóban egyik tényező sem osztható $p^{\alpha+1}$-nel. Ha pedig $0 < \beta \leq \alpha$ tetszőleges pozitív egész, akkor m választása miatt minden i pozitív egész esetén $m+i$ pontosan akkor osztható p^β-val, ha i osztható vele. Ezért a törtet egyszerűsíthetjük p^β-val. Minden lehetséges β értékre elvégezve az egyszerűsítést, olyan törtet kapunk, amelynek sem a számlálója, sem a nevezője nem osztható p-vel. Tehát ebben az esetben van a feladatban szereplő binomiális együtthatók közt olyan, amelyik nem osztható p-vel.

Az $n < m \leq n+k$ esetben pedig az

$$\binom{m-1}{k} = \frac{(m-k)(m-k+1) \cdot \ldots \cdot (m-1)}{k(k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

binomiális együtthatót érdemes tekinteni. Ekkor minden $1 \leq i \leq k$ esetén a tört számlálójában szereplő $m-i$ tényezőről állítható, hogy p-nek pontosan akkora hatványával osztható, mint a tört nevezőjében szereplő i tényező. Tehát az egyszerűsítések elvégzése után látható, hogy $\binom{m-1}{k}$ nem osztható p-vel.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.