I. megoldás. A tetraéder csúcsainak a metsző síkon lévő merőleges vetületei legyenek A', B', C' és D', a csúcsoknak a metsző síktól vett távolságát pedig jelölje rendre d_A, d_B, d_C, d_D. (Ha ezen távolságok valamelyike 0, akkor az állítás nyilvánvaló.) Ekkor az $AA'K$ és $BB'K$ derékszögű háromszögek megfelelő szögeik egyenlősége miatt hasonlóak, tehát

$$\frac{AK}{BK}=\frac{d_A}{d_B}$$

és ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{BL}{CL}=\frac{d_B}{d_C},\quad \frac{CM}{DM}=\frac{d_C}{d_D}\quad \text{és}\quad \frac{DN}{AN}=\frac{d_D}{d_A}.$$

Vagyis $AK\cdot BL\cdot CM\cdot DN=BK\cdot CL\cdot DM\cdot AN$.

Szorozzuk meg mindkét oldalt az

$$\frac{AK\cdot BL\cdot CM\cdot DN}{(AB\cdot BC\cdot CD\cdot AD)^2}$$

törttel, majd a jobb oldalt alakítsuk át felhasználva, hogy $BK=AB-AK$, $CL=BC-BL$, $DM=CD-CM$ és $AN=AD-DN$, végül pedig alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{AK\cdot BL\cdot CM\cdot DN}{AB\cdot BC\cdot CD\cdot AD}\right)^2=$$

$$=\frac{AK(AB-AK)}{AB^2}\cdot\frac{BL(BC-BL)}{BC^2}\cdot\frac{CM(CD-CM)}{CD^2}\cdot\frac{DN(AD-DN)}{AD^2}\le$$

$$\le\left(\frac{AK+(AB-AK)}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{AB^2}\cdot\left(\frac{BL+(BC-BL)}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{BC^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{CM+(CD-CM)}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{CD^2}\cdot\left(\frac{DN+(AD-DN)}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{AD^2}=\left(\frac{1}{2^2}\right)^4.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából négyzetgyököt vonva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

II. megoldás. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a metsző sík egyenlete $Z=0$ legyen. Vetítsük a feladatban szereplő pontokat merőlegesen a z tengelyre, tetszőleges T pont vetülete legyen T'. A merőleges vetítés osztóviszonytartó, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{A'K'}{A'B'}\cdot\frac{B'L'}{B'C'}\cdot\frac{C'M'}{C'D'}\cdot\frac{D'N'}{A'D'}\le\frac{1}{16}.$$

Ha a metsző sík átmegy a tetraéder valamelyik csúcsán, akkor az egyenlőtlenség nyilván teljesül, mert a bal oldali törtek egyike 0. Ha a sík egyik csúcson sem megy át, akkor az A és C csúcsok a sík egyik, a B és D csúcsok pedig a sík másik oldalán helyezkednek el. Mivel a metsző sík merőleges a z tengelyre, azért ugyanez igaz az A', C', illetve a B', D' pontokra is. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy A' és C' harmadik koordinátái pozitívak, míg B' és D' harmadik koordinátái negatívak. Tehát $A'(0,0,a)$, $B'(0,0,-b)$, $C'(0,0,c)$ és $D'(0,0,-d)$ alkalmas pozitív a, b, c, d számokkal. Mivel $K'\equiv L'\equiv M'\equiv N'=(0,0,0)$,

$$\frac{A'K'}{A'B'}=\frac{a}{a+b},\quad\frac{B'L'}{B'C'}=\frac{b}{b+c},\quad\frac{C'M'}{C'D'}=\frac{c}{c+d}\quad\text{és}\quad\frac{D'N'}{A'D'}=\frac{d}{d+a}.$$

Tehát azt kell bizonyítanunk, hogy tetszőleges pozitív a, b, c, d számok esetén fennáll az

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{c+d}\cdot\frac{d}{d+a}\le\frac{1}{16}$$

egyenlőtlenség. Ez viszont egyszerűen következik a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségek átrendezéséből adódó

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\le\frac{1}{2},\quad\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\le\frac{1}{2},\quad\frac{\sqrt{cd}}{c+d}\le\frac{1}{2}\quad\text{és}\quad\frac{\sqrt{da}}{d+a}\le\frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségek összeszorzásából.

A bizonyításból az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha a metsző sík a tetraéder négy élfelezőpontján megy át.