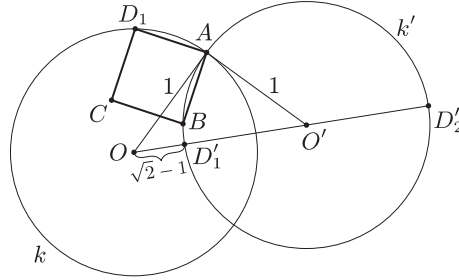


I. megoldás. A négyzet másik két csúcsa a kör középponttól ugyanolyan távolságra van a szimmetria miatt. Az egyszerű megoldás kulcsa a feladat következő átfogalmazása:

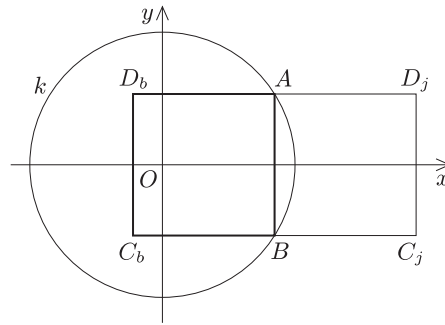
Adott egy egység sugarú k kör és annak egy A pontja. A pozitív körüljárású $ABCD$ négyzet B csúcsa a k körre illeszkedik. Mi a D csúcsnak a kör O középpontjától való lehetséges legkisebb és legnagyobb távolsága?

A D csúcsot a B -ből A körüli pozitív irányú 90° -os forgatással kapjuk. Ezért amikor a B csúcs befutja a k kör A -tól különböző pontjait, a D csúcs mértani helye azon O' középpontú k' kör A -tól különböző pontjaiból áll, amelyet a k -ból ugyancsak A körüli pozitív irányú 90° -os forgatás hoz létre (1. ábra). Az extrémális helyzetben lévő D pontok az OO' egyenesen helyezkednek el. Mivel az OAO' háromszög egyenlőszárú és derékszögű, azért $OO' = \sqrt{2}$. Tehát a D pontnak O -tól való lehetséges legkisebb távolsága $\sqrt{2} - 1$, lehetséges legnagyobb távolsága pedig $\sqrt{2} + 1$.



1. ábra

II. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origó az adott kör O középpontja legyen, a négyzet körre illeszkedő két csúcsának koordinátái pedig $A(\cos t, \sin t)$ és $B(\cos t, -\sin t)$ legyenek, ahol $0 < t \leq \pi/2$ (2. ábra).



2. ábra

Ekkor a négyzet oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, hosszuk pedig $2 \sin t$. Ezért a másik két csúcs koordinátái vagy $C_j(\cos t + 2 \sin t, -\sin t)$ és $D_j(\cos t + 2 \sin t, \sin t)$, vagy pedig $C_b(\cos t - 2 \sin t, -\sin t)$ és $D_b(\cos t - 2 \sin t, \sin t)$, attól függően, hogy a csúcsok az AB egyenesnek O -val megegyező, vagy azzal ellentétes oldalán vannak. Nyilván igaz, hogy $OC_j = OD_j \geq OC_b = OD_b$, ezért a távolság maximumát az OC_j , minimumát pedig az OD_b típusú szakaszok közt kell keresnünk. Mivel a pozitív számok körében a négyzetreemelés megtartja a nagyság szerinti rendezést, elég a távolságok négyzetének szélsőértékeit meghatározni. Vagyis egyrészt az

$$OC_j^2 = (0 - (\cos t + 2 \sin t))^2 + (0 + \sin t)^2 = c(t)$$

függvény legnagyobb, másrészt az

$$OD_b^2 = (0 - (\cos t - 2 \sin t))^2 + (0 - \sin t)^2 = d(t)$$

függvény legkisebb értékét kell meghatározni, mindkét esetben a $0 < t \leq \pi/2$ intervallumon.

Ismert trigonometriai azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c(t) &= (\cos t + 2 \sin t)^2 + \sin^2 t = 1 + 4 \sin^2 t + 4 \sin t \cos t = \\ &= 1 + 4 \sqrt{2} \sin t \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) = 1 + 4 \sqrt{2} \sin t \sin(t + \pi/4) = \\ &= 1 + 2 \sqrt{2} (\cos(t - (t + \pi/4)) - \cos(t + (t + \pi/4))) = \\ &= 1 + 2 \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(2t + \pi/4) \right) = 3 - 2 \sqrt{2} \cos(2t + \pi/4), \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}d(t) &= (\cos t - 2 \sin t)^2 + \sin^2 t = 1 + 4 \sin^2 t - 4 \sin t \cos t = \\&= 1 + 4\sqrt{2} \sin t \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) = 1 + 4\sqrt{2} \sin t \sin(t - \pi/4) = \\&= 1 - 2\sqrt{2}(\cos(t + (t - \pi/4)) - \cos(t - (t - \pi/4))) = \\&= 1 - 2\sqrt{2} \left(\cos(2t - \pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 - 2\sqrt{2} \cos(2t - \pi/4).\end{aligned}$$

Mivel minden x értékre igaz, hogy $-1 \leq \cos x \leq 1$, azért

$$c(t) \leq 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{és} \quad d(t) \geq 3 - 2\sqrt{2}.$$

Ha $0 < t \leq \pi/2$, akkor mindkét egyenlőtlenségben pontosan egyszer áll fenn egyenlőség, $t = 3\pi/8$, illetve $t = \pi/8$ esetén. Tehát $c(t)$ maximuma $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, $d(t)$ minimuma pedig $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$.

Vagyis a négyzet másik két csúcsának O -tól való távolsága legalább $\sqrt{2} - 1$ és legfeljebb $\sqrt{2} + 1$.

Megjegyzés. Az I., „egyszerű” megoldásra persze nehéz rájönni. A feladat „szokásos” megoldása a II. megoldás. Ebben a megoldásban a $c(t)$ és $d(t)$ függvények szélsőértékeit deriválással is meg lehet határozni.