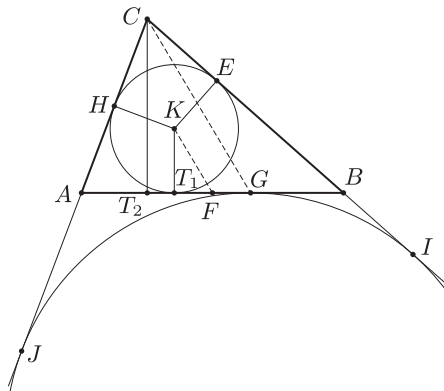


I. megoldás. A CG és KF szakaszok párhuzamosságát az őket tartalmazó T_2CG és a T_1KF háromszögek hasonlóságából látjuk be. A háromszög C csúcsából induló magasságának talppontja legyen T_2 . A beírt kör AB oldalon lévő érintési pontja legyen T_1 , a BC és AC oldalakon pedig E és H .



A körhöz egy külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlők, ezért $CH = CE$, $AH = AT_1$, $BT_1 = BE$. Az ábra alapján látható, hogy

$$AT_1 = c - T_1B = AH,$$

$$CE = a - EB = a - BT_1 = CH,$$

$$AH + CH = b,$$

és $c - T_1B + a - T_1B = b$. Ebből

$$T_1B = \frac{c + a - b}{2}.$$

A hozzáírt kör érintési pontja az a oldal meghosszabbításán legyen az I , a b oldal meghosszabbításán pedig a J pont. Az érintőszakaszok egyenlőségéből az ábra alapján:

$$IB = BG, GA = JA, CI = CJ,$$

$$GA = c - GB = AJ, \quad CB + BI = CA + AJ, \quad \text{és} \quad a + GB = b + c - GB,$$

amiből

$$BG = \frac{b + c - a}{2}.$$

A CT_2B és CAT_2 háromszögekben felírva a Pithagorasz-tételt:

$$a^2 = CT_2^2 + T_2B^2,$$

$$b^2 = CT_2^2 + (c - T_2B)^2 = CT_2^2 + c^2 - 2cT_2B + T_2B^2.$$

Az első egyenletből a másodikat kivonva: $a^2 - b^2 = -c^2 + 2cT_2B$. Ebből T_2B -t kifejezve:

$$T_2B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Így

$$T_1F = T_1B - FB = \frac{c + a - b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a - b}{2},$$

$$\begin{aligned} T_2G &= T_2B - GB = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} - \frac{b + c - a}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2c} + \frac{c}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \\ &= \frac{(a + b)(a - b)}{2c} + \frac{a - b}{2} = \frac{(a + b)(a - b)}{2c} + \frac{(a - b)c}{2c} = \frac{(a - b)(a + b + c)}{2c}. \end{aligned}$$

A két szakasz aránya: $\frac{T_2G}{T_1F} = \frac{a+b+c}{c}$. Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva:

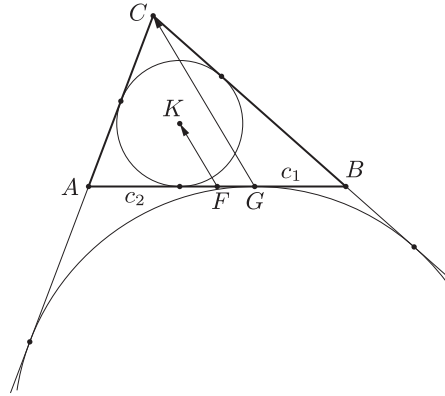
$$T = \frac{(a+b+c) \cdot KT_1}{2} = \frac{c \cdot T_2C}{2},$$

amiből

$$\frac{T_2C}{KT_1} = \frac{a+b+c}{c}, \quad \text{tehát} \quad \frac{T_2C}{KT_1} = \frac{T_2G}{T_1F}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{T_2C}{T_2G} = \frac{T_1K}{T_1F}.$$

A $T_2CG\triangle$ és a $T_1KF\triangle$ két-két oldalának aránya és a közbezárt szögük megegyezik, ezért a két háromszög hasonló, így szögeik megegyeznek. Mivel 2-2 oldaluk párhuzamos, azért a harmadik oldalpár is párhuzamos lesz egymással, vagyis $FK \parallel GC$.

II. megoldás. Az *ábra* jelöléseit felhasználva az állítást vektorok segítségével igazoljuk. Legyen a három csúcs helyvektora $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. Azt mutatjuk meg, hogy (alkalmas k számmal) $\vec{FK} = k \cdot \vec{GC}$, ami egyenértékű a feladat állításával.



Felhasználunk egy, a beírt kör középpontjának helyvektorára vonatkozó összefüggést:

$$\vec{K} = \frac{a \cdot \vec{A} + b \cdot \vec{B} + c \cdot \vec{C}}{a+b+c}.$$

Közismert, hogy $\vec{F} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$. Tudjuk továbbá, hogy a hozzáírt kör érintési pontja a c szakaszt két, c_1 és c_2 hosszúságú részre osztja, ezek hossza pedig a szokásos jelöléssel $c_1 = s - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$, és $c_2 = s - b = \frac{1}{2}(a + c - b)$. Felhasználjuk az osztópont képletét:

$$\vec{G} = \frac{c_1 \cdot \vec{A} + c_2 \cdot \vec{B}}{c} = \frac{(b+c-a) \cdot \vec{A} + (a+c-b) \cdot \vec{B}}{2c}.$$

Most már felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \vec{KF} &= \vec{F} - \vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) - \frac{a \cdot \vec{A} + b \cdot \vec{B} + c \cdot \vec{C}}{a+b+c} = \\ &= \frac{(a+b+c) \cdot \vec{A} + (a+b+c) \cdot \vec{B} - 2a \cdot \vec{A} - 2b \cdot \vec{B} - 2c \cdot \vec{C}}{2(a+b+c)} = \\ &= \frac{(b+c-a) \cdot \vec{A} + (a+c-b) \cdot \vec{B} - 2c \cdot \vec{C}}{2(a+b+c)}, \end{aligned}$$

és

$$\vec{CG} = \vec{G} - \vec{C} = \frac{(b+c-a) \cdot \vec{A} + (a+c-b) \cdot \vec{B} - 2c \cdot \vec{C}}{2c}.$$

Könnyen látható, hogy $\vec{KF} = \frac{c}{a+b+c} \cdot \vec{CG}$. Ezt akartuk bizonyítani.