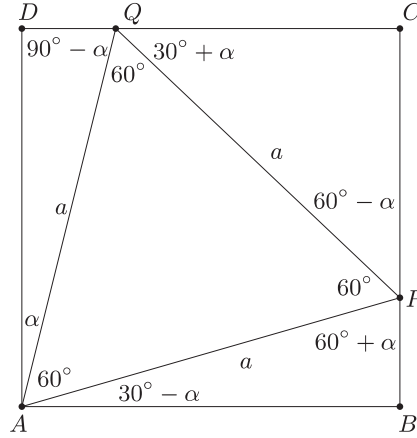


Megoldás. Legyen a szabályos háromszög oldala a hosszúságú és a DAQ nagysága α . Ekkor $DQA = 90^\circ - \alpha$ és $PAB = 90^\circ - \alpha - 60^\circ = 30^\circ - \alpha$.

Ebből $APB = 180^\circ - (30^\circ - \alpha + 90^\circ) = 60^\circ + \alpha$, és így

$$QPC = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ + \alpha) = 60^\circ - \alpha.$$

A CQP nagysága $180^\circ - (90^\circ + 60^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$.



Az ABP derékszögű háromszögből

$$AB = a \cos(30^\circ - \alpha)$$

és

$$BP = a \sin(30^\circ - \alpha).$$

A PCQ háromszögből

$$PC = a \sin(30^\circ + \alpha)$$

és

$$CQ = a \cos(30^\circ + \alpha).$$

Végül a QDA háromszögből

$$QD = a \sin \alpha \quad \text{és} \quad DA = a \cos \alpha.$$

A bizonyítandó állítás:

$$(1) \quad t_{QDA} + t_{ABP} = t_{PCQ},$$

$$2t_{QDA} + 2t_{ABP} = 2t_{PCQ},$$

$$QD \cdot DA + AB \cdot BP = PC \cdot CQ,$$

Írjuk be az előbb kapott kifejezéseket:

$$a \sin \alpha \cdot a \cos \alpha + a \cos(30^\circ - \alpha) \cdot a \sin(30^\circ - \alpha) = a \sin(30^\circ + \alpha) \cdot a \cos(30^\circ + \alpha).$$

Mindkét oldalt osztva $a^2 \neq 0$ -val és az addíciós tételeket használva:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \alpha + (\cos 30^\circ \cos \alpha + \sin 30^\circ \sin \alpha)(\sin 30^\circ \cos \alpha - \cos 30^\circ \sin \alpha) = \\ = (\sin 30^\circ \cos \alpha + \cos 30^\circ \sin \alpha)(\cos 30^\circ \cos \alpha - \sin 30^\circ \sin \alpha). \end{aligned}$$

A zárójeleket felbontva és az egyenletet rendezve kapjuk, hogy:

$$\sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 30^\circ \cos \alpha \sin \alpha + 2 \sin^2 30^\circ \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Felhasználva, hogy $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ és $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kapjuk, hogy

$$\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

ami azonosság. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, az (1) egyenlőség teljesül.